А. П. КИСЕЛЕВ

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Книга для учителя

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1980

ББК 74.262.7
К 44

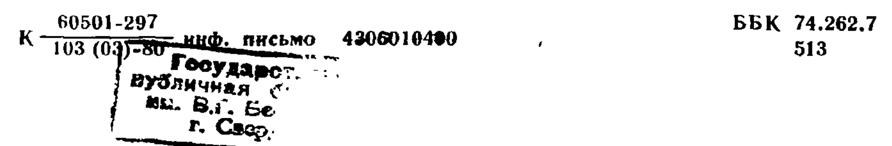
Киселев А. П.

К 44 Элементарная геометрия. Книга для учителя.— М.: Просвещение, 1980.— 287 с., ил.

Настоящая книга печатается без изменений с 12-го издания (1931 г.) учебника геометрии, по которому долгое время велось преподавание в школе. Благодаря высокому педагогическому мастерству, с которым написана книга, она не потеряла своей значимости и в настоящее время.

Книга предназначена учителю. К ней дано предисловие акад. А Н. Тихонова.

К $\frac{60501\text{-}297}{103\ (03)\text{-}80}$ инф. письмо 4306010400 ББК 74.262.7
513



ПРЕДИСЛОВИЕ

«Элементарная геометрия», предлагаемая вниманию читателей, написана замечательным русским советским педагогом Андреем Петровичем Киселевым (1852—1940).

А. П. Киселев родился 30 ноября (12 декабря) 1852 г. в г. Мценске Орловской губернии в бедной мещанской семье. Среднее образование он получил в орловской классической гимназии, которую окончил с золотой медалью. В 1875 г. А. П. Киселев окончил физико-математический факультет Петербургского университета и начал свою педагогическую деятельность. Проработав 25 лет в гимназиях Воронежа, Курска, Харькова преподавателем математики, механики, физики и черчения, в 1901 г. он вышел в отставку и целиком посвятил себя литературной работе. После революции Андрей Петрович вновь принялся за преподавание, главным образом в военных училищах, сначала в Воронеже, а затем в Ленинграде, и продолжал эту деятельность до 1925 г.

Первый учебник А. П. Киселева «Математический курс арифметики для средних учебных заведений» вышел в 1884 г. Затем в 1888 г. издается «Элементарная алгебра», а в 1893 г.— «Элементарная геометрия».

К 1930 г. учебник геометрии выдержал около сорока изданий, постоянно при этом совершенствуясь. При работе над учебником А. П. Киселев поддерживал связь с передовыми учителями математики в нашей стране и внимательно изучал вопросы преподавания математики за рубежом. Свою работу по написанию школьных учебников А. П. Киселев продолжал и после Октябрьской революции. Высокой оценкой педагогической деятельности Андрея Петровича было награждение его в 1933 г. орденом Трудового Красного Знамени. Учебники А. П. Киселева выдержали в общей сложности около трехсот изданий общим тиражом в несколько миллионов экземпляров.

Со времени выхода первых учебников А. П. Киселева и математика и школьное образование далеко шагнули вперед. Возрастание роли математики в жизни современного общества вызвало новые требования к постановке математического образования в средней школе. Поэтому содержание книг А. П. Киселева можно считать в какой-то мере устаревшим. Однако благодаря высокому педагогическому мастерству, с которым они были написаны, простоте, доходчивости и логичности изложения книги эти не потеряли своей значимости и в настоящее время.

Появление предлагаемой книги, по которой долгое время велось преподавание геометрии в школе, будет, несомненно, с интересом встречено учителями и читателями, которых волнуют проблемы школьного математического образования, и явится скромной данью признательности и уважения выдающемуся учителю математики.

Академик *А. Н. Тихонов*

ВВЕДЕНИЕ

1. Геометрические фигуры. Часть пространства, занимаемая физическим телом, называется *геометрическим телом.*

Геометрическое тело отделяется от окружающего пространства *поверхностью.*

Часть поверхности отделяется от смежной части *линией.*

Часть линии отделяется от смежной части *точкой.*

Геометрическое тело, поверхность, линия и точка не существуют раздельно. Однако при помощи отвлечения мы можем рассматривать поверхность независимо от геометрического тела, линию — независимо от поверхности и точку — независимо от линии. При этом поверхность мы должны представлять себе не имеющей толщины, линию — не имеющей ни толщины, ни ширины и точку — не имеющей ни длины, ни ширины, ни толщины.

Совокупность каких бы то ни было точек, линий, поверхностей или тел, расположенных известным образом в пространстве, называется, вообще, геометрической *фигурой.*

2. Геометрия. Наука, рассматривающая свойства геометрических фигур, называется г е о м е т р и е й, что в переводе с греческого языка означает з е м л е м е р и е. Такое название этой науке дано было потому, что в древнее время главной целью геометрии было измерение расстояний и площадей на земной поверхности.

3. Прямая линия. Всякий знает, что такое прямая линия, или просто *прямая,* представление о которой дает нам натянутая тонкая нить.

Прямая линия обладает следующим очевидным свойством: **через всякие две точки пространства можно провести прямую и притом только одну.**

Из этого свойства следует:

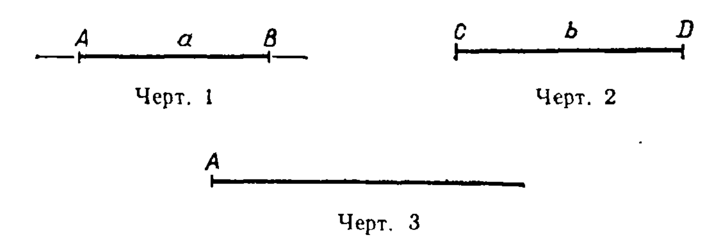
если две прямые наложены одна на другую так, что какие-нибудь две точки одной прямой совпадают с двумя точками другой прямой, то эти прямые сливаются и во всех остальных точках (потому что в противном случае через две точки можно было бы провести две различные прямые, что невозможно).

По той же причине две прямые могут пересечься только в о д н о й т о ч к е.

4. Прямая конечная и бесконечная. Если прямую представляют продолженной в обе стороны бесконечно, то ее называют *бесконечной* или *неограниченной* прямой.

Прямую обозначают обыкновенно двумя буквами, поставленными у двух каких-либо ее точек. Так, говорят: «прямая AB или BA» (черт. 1).

Часть прямой, ограниченная с обеих сторон, называется *отрезком* прямой, или *конечной прямой*; такая прямая обыкновенно обозначается двумя буквами, поставленными у концов ее (отрезок CD, черт. 2). Иногда прямая или отрезок прямой обозначается и одной



Черт. 1

Черт. 2

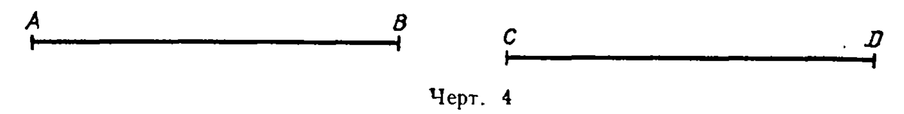
Черт. 3

буквой; например, говорят: «прямая a», «отрезок b» и т. п. Для краткости вместо «отрезок прямой» мы будем часто говорить просто «отрезок».

Иногда рассматривают прямую, ограниченную только с одной стороны, например в точке A (черт. 3). О такой прямой говорят, что она и с х о д и т из точки A; ее называют *полупрямой* (или *лучом*).

5. Равенство и неравенство отрезков.

Два отрезка считаются равными, если они могут быть наложены друг на друга так, что совмещаются. Положим, например, что мы накладываем отрезок AB на отрезок CD (черт. 4) так, чтобы точка A

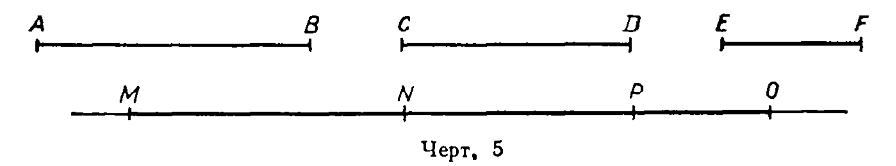


Черт. 4

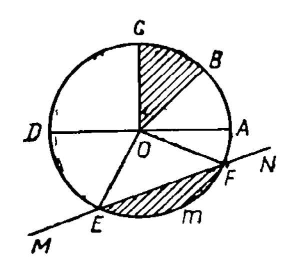
упала на C и чтобы прямая AB пошла по CD; если при этом концы B и D совпадут, то отрезки AB и CD считаются равными; в противном случае отрезки будут не равны, причем меньшим считается тот, который составит часть другого.

Чтобы на какой-нибудь прямой отложить отрезок, равный данному отрезку, употребляют циркуль — прибор, известный учащимся из опыта.

6. Сумма отрезков. Суммой нескольких данных отрезков AB, CD, EF, . . . (черт. 5) называется такой отрезок, который получится следующим образом.



Черт. 5



Черт. 6

На какой-нибудь прямой берем произвольную точку M и откладываем от нее отрезок MN, равный AB; затем от точки N в том же направлении откладываем отрезок NP, равный CD, и отрезок PO, равный EF. Тогда отрезок MO и будет сумма отрезков AB, CD и EF (которые по отношению к этой сумме называются слагаемыми). Подобным образом можно получить сумму какого угодно числа отрезков.

Сумма отрезков обладает свойствами всякой суммы; так, она не зависит от порядка слагаемых (переместительное свойство) и не изменяется, если некоторые слагаемые будут заменены их суммою (сочетательное свойство).

7. Действия над отрезками. Из понятия о сумме выводятся понятия о разности, произведении и частном отрезков. Так, разность отрезков AB и CD (если $AB > CD$) есть такой третий отрезок, сумма которого с CD образует AB; произведение отрезка AB на число 3 есть сумма трех отрезков, из которых каждый равен AB; частное от деления отрезка AB на число 3 есть третья часть AB и т. п.

Когда данные отрезки измерены какою-нибудь линейной единицей (например, сантиметром), то они выразятся числами (целыми или дробными); в таком случае сумма отрезков выразится суммою чисел, измеряющих эти отрезки, разность выразится разностью чисел и т. д.

8. Понятие об окружности. Если дадим циркулю произвольное растворение и, поставив его ножку с острием в какую-нибудь точку O плоскости (черт. 6), станем вращать циркуль вокруг этой точки, то другая его ножка, снабженная карандашом или пером, опишет на плоскости непрерывную линию, все точки которой одинаково удалены от точки O. Эта линия называется *окружностью*, а точка O — центром ее. Прямые OA, OB, OC, . . ., соединяющие центр с какими-нибудь точками окружности, называются *радиусами*. Все радиусы одной окружности равны между собою.

Окружности, описанные одинаковыми радиусами, равны, так как они при наложении совмещаются.

Бесконечная прямая (MN), проходящая через какие-нибудь две точки окружности, называется *секущей*.

Отрезок прямой (EF), соединяющий две какие-нибудь точки окружности, называется *хордой*.

Всякая хорда (AD), проходящая через центр, называется *диаметром*.

Какая-нибудь часть окружности (например, EmF) называется *дугой*.

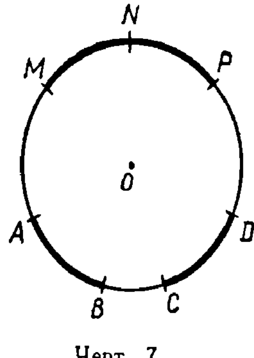
О хорде (EF), соединяющей концы какой-нибудь дуги, говорят, что она стягивает эту дугу.

Дуга обозначается иногда знаком $\smile$; например, пишут так: $\smile EmF$.

Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется *кругом*.

Часть круга, заключенная между двумя радиусами (часть COB,

покрытая штрихами на черт. 6), называется *сектором*, а часть, отсекаемая от него какой-нибудь секущей (часть EmF, покрытая также штрихами), называется *сегментом*.



Черт. 7

9. Равенство и неравенство дуг. Сумма их. Две дуги одной и той же окружности (или равных окружностей) считаются равными, если они при наложении могут быть совмещены. Положим, например, что мы накладываем дугу AB на дугу CD так, чтобы точка A упала в точку C и дуга AB пошла по дуге CD; если при этом концы B и D совпадут, то $\cup AB = \cup CD$; в противном случае дуги не равны, причем та будет меньше, которая составит только часть другой.

10. Сумма дуг. Суммой нескольких данных дуг одинакового радиуса называется такая дуга того же радиуса, которая составлена из частей, соответственно равных данным дугам. Так, если от произвольной точки M (черт. 7) окружности отложим часть MN, равную AB, и затем от точки N в том же направлении отложим часть NP, равную CD, то дуга MP будет суммою дуг AB и CD. Подобно этому можно составить сумму трех и более дуг.

Сумма дуг, как и сумма отрезков прямой, обладает свойствами — переместительным и сочетательным.

Из понятия о сумме дуг выводятся понятия об их разности, произведении и частном в том же смысле, как и для отрезков прямых.

11. Плоскость. Из различных поверхностей наиболее знакомая нам есть плоская поверхность, или просто *плоскость*, представление о которой дает нам, например, поверхность хорошего оконного стекла или поверхность спокойной воды в пруде и т. п.

Укажем следующие два свойства плоскости:

1. Если на плоскости возьмем какие-нибудь две точки и через них вообразим прямую, то эта прямая будет лежать на плоскости и всеми остальными своими точками.

2. Всякую часть плоскости можно наложить всеми ее точками на другое место той или другой плоскости, причем накладываемую часть можно предварительно перевернуть другой стороной.

12. Разделение геометрии. Геометрия разделяется на две части: планиметрию и стереометрию. Первая рассматривает свойства таких фигур, все части которых помещаются на одной плоскости, вторая — свойства таких фигур, не все части которых помещаются на одной плоскости.

ПЛАНИМЕТРИЯ

ОТДЕЛ ПЕРВЫЙ

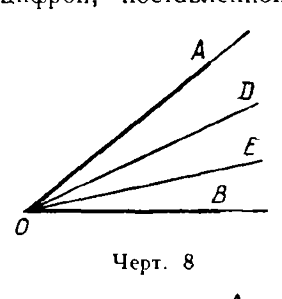
ПРЯМАЯ ЛИНИЯ

I. УГЛЫ

Предварительные понятия

13. Угол. Фигура, образованная двумя полупрямыми (OA и OB, черт. 8), исходящими из одной точки, называется *углом*. Полупрямые, образующие угол, называются *сторонами*, а точка, из которой они исходят,— *вершиной* угла. Стороны должно представлять себе продолженными от вершины бесконечно.

Угол обыкновенно обозначается тремя буквами, из которых средняя ставится у вершины, а крайние — у каких-нибудь точек сторон; например, говорят: «угол AOB» или «угол BOA» (черт. 8). Но можно обозначать угол и одной буквой, поставленной у вершины, если при этой вершине нет других углов. Мы иногда будем обозначать угол цифрой, поставленной внутри угла, около вершины.



Черт. 8

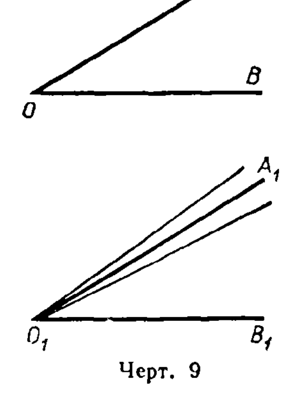
Часть плоскости, ограниченная сторонами угла, рассматривается как лежащая внутри угла; остальная часть плоскости лежит вне угла; первая составляет *внутреннюю область* угла, вторая — *внешнюю область* его.

Если из вершины угла (черт. 8) проведем внутри его какие-нибудь прямые OD, OE,. . ., то образовавшиеся при этом углы AOD, DOE, EOB, . . . рассматриваются как части угла AOB.

Слово «угол» на письме заменяется часто знаком $\angle$.

14. Равенство и неравенство углов.

Два угла считаются равными, если при наложении они могут совместиться. Положим, например, что мы накладываем угол AOB на угол $A_1O_1B_1$ (черт. 9) так, чтобы вершина O упала в O_1, сторона OB пошла по O_1B_1 и чтобы углы покрыли друг друга своими внутренними областями. Если при этом сторона OA совместится с O_1A_1, то углы равны; если же OA пойдет внутри угла $A_1O_1B_1$ или вне его, то углы не равны, причем тот из них будет меньше, который составит часть другого угла.



Черт. 9

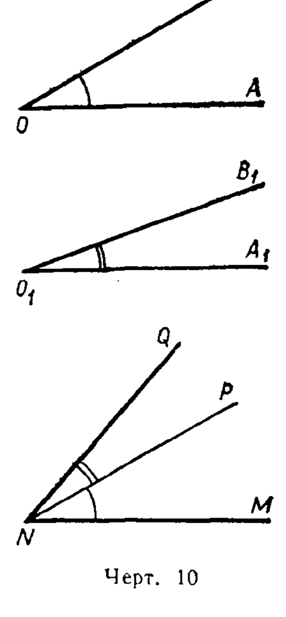
15. Сумма углов. Суммой углов AOB и $A_1O_1B_1$ (черт. 10) называется такой угол, ко-

торый получится следующим образом. Строим угол MNP, равный первому данному углу AOB, и к нему пристраиваем угол PNQ равный другому данному углу $A_1O_1B_1$ так, чтобы у обоих углов оказалась общая вершина N и общая сторона NP и чтобы внутренние области углов были расположены по разные стороны от общей стороны NP. Тогда угол MNQ и будет сумма углов AOB и $A_1O_1B_1$. Подобным образом может быть составлена сумма трех и более углов.

Сумма углов, как и сумма отрезков прямой, обладает свойствами — переместительным и сочетательным.

Из понятия о сумме углов выводятся понятия об их разности, произведении и частном.

Часто приходится говорить о такой полупрямой, которая делит данный угол пополам; такой полупрямой дали особое название: *биссектриса* (черт. 11) (или *равноделящая*).



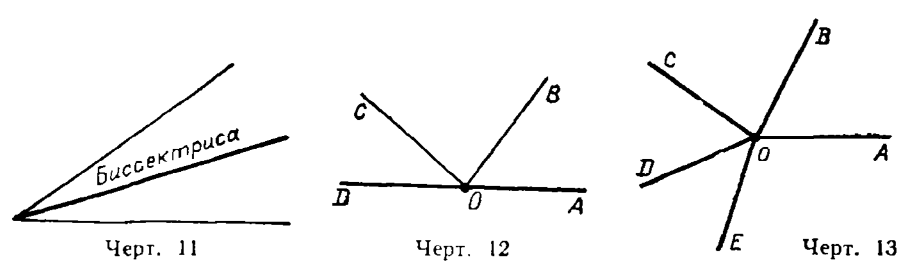
Черт. 10

16. Расширение понятия об угле. При нахождении суммы углов могут представиться некоторые особые случаи, которые полезно рассмотреть отдельно.

1. Может случиться, что после сложения нескольких углов, например трех: AOB, BOC и COD (черт. 12), сторона OD угла COD составит продолжение стороны OA угла AOB. Мы получим тогда фигуру, образованную двумя полупрямыми (OA и OD), исходящими из одной точки (O) и составляющими продолжение одна другой. Такую фигуру принято тоже называть углом (*развернутым*, или *выпрямленным*). Внутренняя область развернутого угла составляет половину плоскости.

2. Может случиться, что после сложения нескольких углов, например пяти углов: AOB, BOC, COD, DOE и EOA (черт. 13), сторона OA угла EOA совместится со стороной OA угла AOB.

Фигура, образованная такими совпавшими полупрямыми (рассматриваемая вместе со всей плоскостью, расположенной кругом общей вершины O), также называется углом (*полным*).



Черт. 11 Черт. 12 Черт. 13

3. Наконец, может случиться, что, строя сумму углов, мы не только заполним всю плоскость кругом их общей вершины, но даже будем вынуждены налагать углы один на другой, покрывая плоскость вокруг общей вершины во второй раз, в третий раз и т. д. Такая сумма углов равна одному полному углу, сложенному с некоторым углом, или равна двум полным углам, сложенным с некоторым углом, и т. п.

Измерение углов

17. Центральный угол и два его свойства. Угол (AOB, черт. 14), образованный двумя радиусами, называется *центральным* углом; о таком угле и дуге, заключенной между его сторонами, говорят, что они с о о т в е т с т в у ю т друг другу.

Центральные углы по отношению к соответствующим им дугам обладают следующими двумя свойствами:

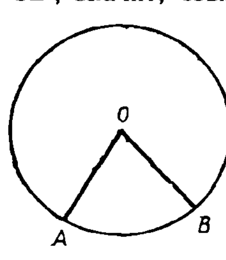
В одном круге или в равных кругах:

1. **Если центральные углы равны, то и соответствующие им дуги равны.**

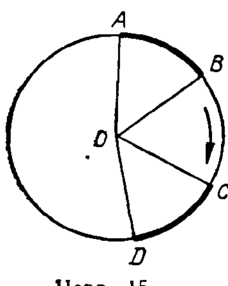
2. Обратно, **если дуги равны, то и соответствующие им центральные углы равны.**

Пусть $\angle AOB = \angle COD$ (черт. 15); требуется доказать, что дуги AB и CD также равны.

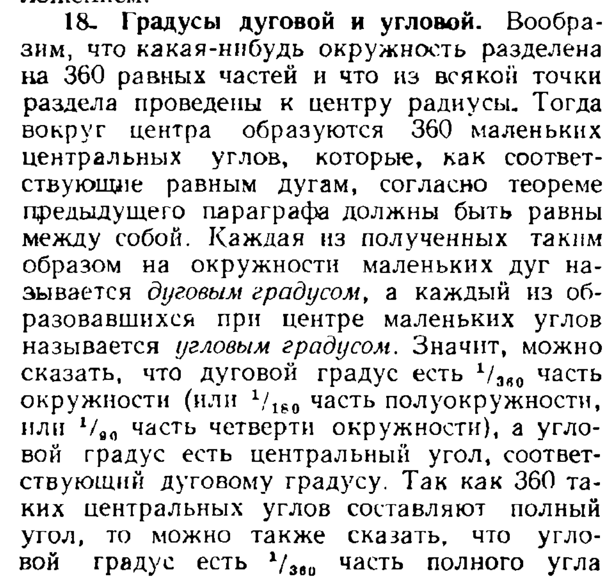
Вообразим, что сектор AOB мы повернули вокруг центра O в направлении, указанном стрелкой, на столько, чтобы радиус OA совпал с OC. Тогда вследствие равенства углов радиус OB совместится с OD; значит, совместятся и дуги AB и CD, т. е. они будут равны.



Черт. 14



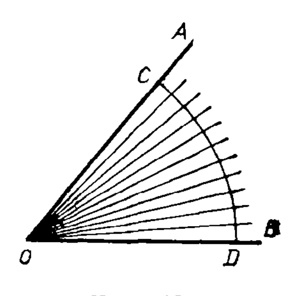
Черт. 15


Второе свойство доказывается также наложением.

18. Градусы дуговой и угловой. Вообразим, что какая-нибудь окружность разделена на 360 равных частей и что из всякой точки раздела проведены к центру радиусы. Тогда вокруг центра образуются 360 маленьких центральных углов, которые, как соответствующие равным дугам, согласно теореме предыдущего параграфа должны быть равны между собой. Каждая из полученных таким образом на окружности маленьких дуг называется *дуговым градусом*, а каждый из образовавшихся при центре маленьких углов называется *угловым градусом*. Значит, можно сказать, что дуговой градус есть $^1/_{360}$ часть окружности (или $^1/_{180}$ часть полуокружности, или $^1/_{90}$ часть четверти окружности), а угловой градус есть центральный угол, соответствующий дуговому градусу. Так как 360 таких центральных углов составляют полный угол, то можно также сказать, что угловой градус есть $^1/_{360}$ часть полного угла

(или $^1/_{180}$ часть развернутого угла, или $^1/_{90}$ часть половины развернутого угла).

Градусы (дуговые и угловые) подразделяются еще на 60 равных частей, называемых *минутами*, и минуты подразделяются еще на 60 равных частей, называемых *секундами* [1].



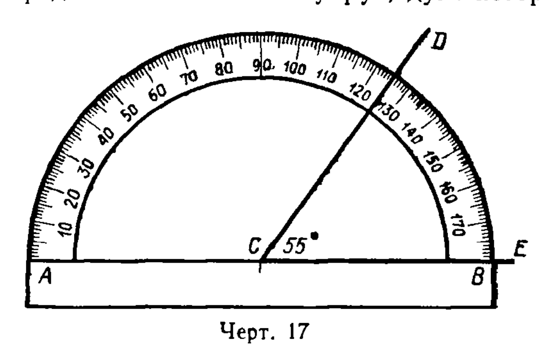
Черт. 16

19. Соответствие между центральными углами и дугами. Пусть AOB есть какой-нибудь угол (черт. 16). Опишем между его сторонами из вершины O как центра произвольным радиусом дугу CD; тогда угол AOB будет центральным углом, соответствующим дуге CD. Положим, что в этой дуге содержится 11 дуговых градусов (на чертеже градусы изображены в увеличенном размере). Тогда, если соединим точки деления с центром, угол AOB разделится, очевидно, на 11 угловых градусов. Вообще, можно сказать, что угол измеряется соответствующей ему дугой, разумея под этим, что в угле содержится столько угловых градусов, минут и секунд, сколько в соответствующей ему дуге содержится дуговых градусов, минут и секунд. Если, например, в дуге CD содержится 11 градусов 10 минут 15 секунд дуговых, то и в угле AOB заключается 11 градусов 10 минут 15 секунд угловых, что принято сокращенно выражать так:

$$\angle AOB = 11^\circ 10' 15'',$$

обозначая знаками °, ′ и ″ соответственно градусы, минуты и секунды.

20. Транспортир. Этот прибор (черт. 17), употребляемый для измерения углов, представляет собою полукруг, дуга которого разделена



Черт. 17

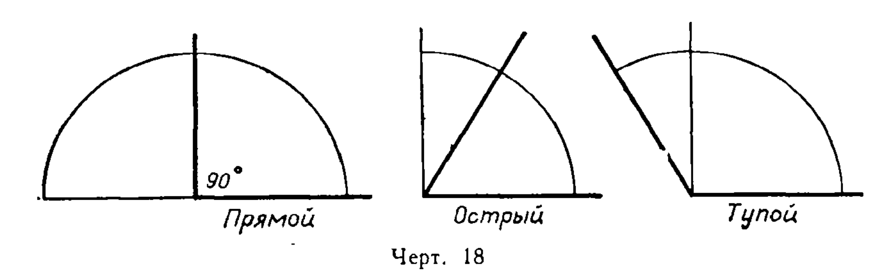
на 180 градусов. Чтобы измерить угол DCE, накладывают на него прибор так, чтобы центр полукруга совпадал с вершиной угла, а радиус CB совпадал со стороной CE. Тогда число градусов, содержащееся

[1] Употребительна также сотенная система мер углов и дуг; по этой системе за градус дуги принимают $^1/_{100}$ четверти окружности (и, следовательно, за градус угла берут $^1/_{100}$ прямого угла), минуту принимают равной $^1/_{100}$ градуса, секунду — $^1/_{100}$ минуты.

в дуге, заключенной между сторонами угла DCE, покажет величину его. При помощи транспортира можно также начертить угол, содержащий данное число градусов (например, угол в 90°, в 45°, в 30° и т. п.).

Смежные и вертикальные углы

21. Прямой, острый и тупой углы. Угол в 90° (составляющий, следовательно, половину развернутого угла или четверть полного угла) называют *прямым* углом; угол, меньший прямого, называют *острым*, а угол, больший прямого, называют *тупым* (черт. 18).



Черт. 18

Конечно, **все прямые углы**, как содержащие одинаковое число градусов, **равны между собой**.

Величину прямого угла иногда обозначают буквой d (начальная буква французского слова droit, что значит «прямой»).

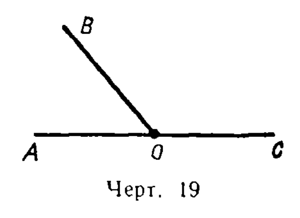
22. Смежные углы и их свойства. Два угла (AOB и BOC, черт. 19) называются *смежными*, если одна сторона у них общая, а две другие стороны составляют продолжение одна другой.

Так как такие углы в сумме составляют развернутый угол, то **сумма двух смежных углов равна 180°** (другими словами, она равна сумме двух прямых углов).

Для каждого данного угла можно построить два смежных с ним угла. Например, для угла AOB (черт. 20), продолжив сторону AO, мы получим один смежный угол BOC, а продолжив сторону BO, получим другой смежный угол AOD. **Два угла, смежные с одним и тем же углом, равны между собою**, так как каждый из них содержит одинаковое число градусов, именно такое число, которое в сумме с числом градусов, содержащихся в угле AOB, составляет 180°, заключающихся в развернутом угле.

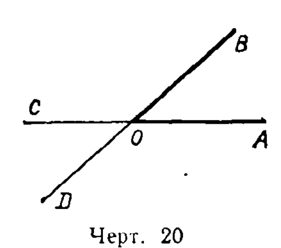
Если угол AOB прямой (черт. 21), т. е. если он содержит 90°, то и каждый из смежных с ним углов COB и AOD должен быть также прямой, так как он содержит в себе 180°—90°, т. е. 90°; четвертый угол COD тоже должен быть прямым, так как три угла AOB, BOC и AOD составляют в сумме 270°, и, следовательно, от 360° на долю четвертого угла COD остается тоже 90°. Таким образом, **если при пересечении двух прямых** (AC и BD, черт. 21) **один из четырех углов окажется прямым, то и остальные три угла должны быть прямыми.**

23. Перпендикуляр и наклонная. Общая сторона (OB) двух смежных углов называется *наклонной* к прямой (AC), на которой лежат две другие стороны, в том случае, когда смежные углы не равны между собой (черт. 22, *а*); в том же случае, когда смежные углы равны (черт. 22, *б*) и когда, следовательно, каждый из углов есть прямой, общая сторона называется *перпендикуляром* к прямой, на которой лежат две другие стороны. Общая вершина (O) в первом случае называется *основанием наклонной*, во втором случае — *основанием перпендикуляра*.



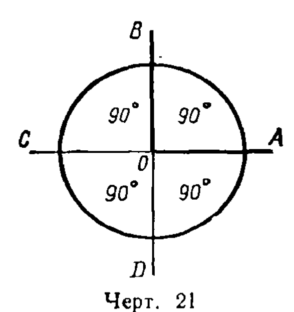
Черт. 19

Две прямые (AC и BD, черт. 21), пересекающиеся между собой под прямым углом, называются *взаимно перпендикулярными*. Что прямая AC перпендикулярна к прямой BD, выражают письменно так: $AC \perp BD$.



Черт. 20

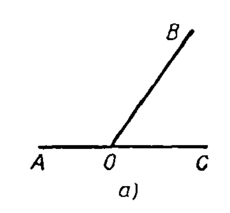
24. Чертежный треугольник. Для построения перпендикуляра к данной прямой очень удобен чертежный треугольник, у которого один из углов делается прямым. Чтобы провести перпендикуляр к прямой AB (черт. 23) через точку C, данную на этой прямой, или через точку D, взятую вне прямой, приставляют линейку к прямой AB и к линейке треугольник и затем, придерживая линейку рукой, двигают треугольник вдоль линейки до тех пор, пока другая сторона прямого угла не пройдет через точку C или D. Остается затем провести прямую CE.

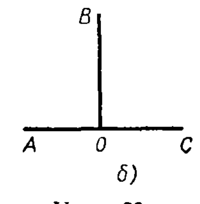


Черт. 21

Замечания. 1. Если перпендикуляр к прямой AB приходится проводить из точки C, лежащей на этой прямой, то говорят, что этот перпендикуляр надо «восставить» к прямой AB, а если требуется перпендикуляр провести из точки D, лежащей вне прямой, то говорят, что его надо «опустить» на прямую (все равно: вниз, или вверх, или вбок).

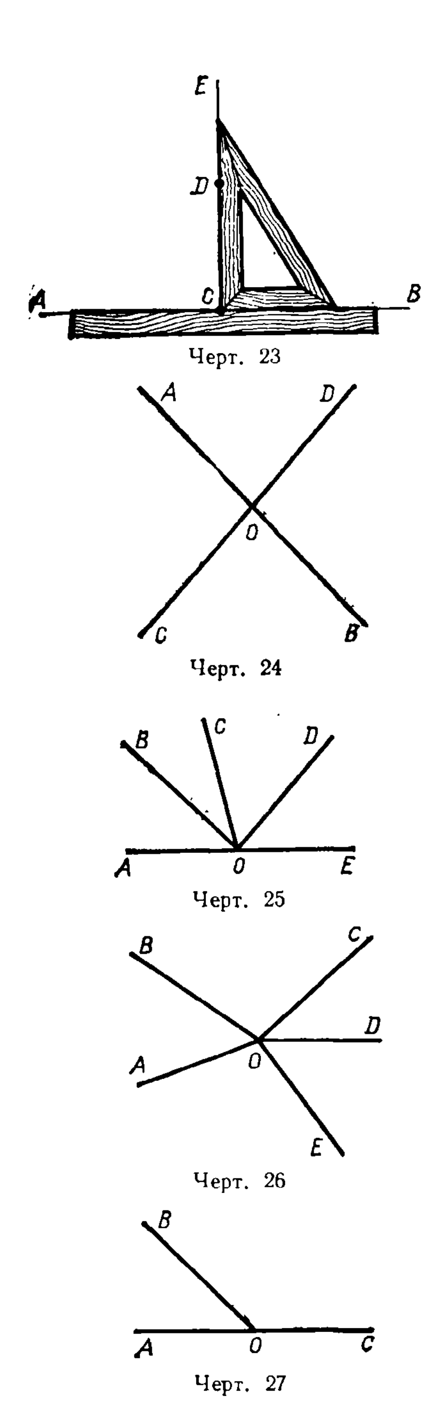
2. Очевидно, что из всякой точки данной прямой можно к этой прямой восставить перпендикуляр и притом только один.





Черт. 22

25. Вертикальные углы. Два угла называются *вертикальными*, если стороны одного составляют продолжение сторон другого. Так, при пересечении двух прямых AB и CD (черт. 24) образуются две пары вертикальных углов: AOD и COB, AOC и DOB (и четыре пары смежных углов).



Черт. 23

Черт. 24

Черт. 25

Черт. 26

Черт. 27

Два вертикальных угла равны между собой (например, $\angle AOD = \angle BOC$), так как каждый из них есть смежный с одним и тем же углом (с $\angle DOB$ или с $\angle AOC$), а такие углы, как мы видели **(22)**, равны друг другу.

26. Углы, имеющие общую вершину. О таких углах полезно заметить следующие три простые истины:

1. **Сумма нескольких углов** (AOB, BOC, COD, DOE, черт. 25), **имеющих общую вершину и заполняющих все пространство по одну сторону от прямой** (AE), **равна 180°** (иначе $2d$), так как сумма эта составляет развернутый угол, а такой угол содержит 180°.

2. **Сумма нескольких углов** (AOB, BOC, COD, DOE, EOA, черт. 26), **имеющих общую вершину и заполняющих все пространство кругом этой вершины, равна 360°** (иначе $4d$), так как эта сумма образует полный угол, а такой угол содержит 360°.

3. **Если два угла** (AOB и BOC, черт. 27) **имеют общую вершину** (O) **и общую сторону** (OB) **и в сумме составляют** $2d$ (т. е. 180°), **то их две другие стороны** (OA и OC) **составляют продолжение одна другой** (т. е. такие углы будут смежные). Действительно, сумма указанных углов составляет угол AOC, и если этот угол равен 180°, то это значит, что он есть развернутый угол, т. е. что AO составляет с OC одну прямую.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Некоторый угол равен 38°29′; найти величину смежного с ним угла.

2. Два угла ABC и CBD, имея общую вершину B и общую сторону BC, расположены так, что они не покрывают друг друга: угол $ABC = 100°20'$, а угол $CBD = 79°40'$. Составляют ли стороны AB и BD прямую или ломаную?

3. Построить какой-нибудь угол и при помощи транспортира и линейки провести его биссектрису.

Доказать, что

4. Биссектрисы двух смежных углов взаимно перпендикулярны.

5. Биссектрисы двух вертикальных углов составляют продолжение одна другой.

6. Если при точке O прямой AB (черт. 24) построим по разные стороны от AB равные углы AOD и BOC, то стороны их OD и OC составляют одну прямую.

7. Если из точки O (черт. 24) проведем полупрямые OA, OD, OB, OC так, что $\angle AOC = \angle DOB$ и $\angle AOD = \angle COB$, то OB есть продолжение OA и OD — продолжение OC.

Указание. Надо применить § 26, 2 и 3.

II. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ [1]

27. В геометрии, как и во всякой другой математической науке, могут встретиться предложения следующих различных родов.

Определения. Так называют предложения, в которых разъясняется, какой смысл придают тому или другому выражению или названию. Например, мы уже встречали определения центрального угла, прямого угла, перпендикуляра и пр.

Аксиомы. Так называют истины, которые принимаются без доказательства. Таковы, например, предложения, встречавшиеся нам ранее:

Через всякие две точки можно провести прямую и притом только одну.

Всякую часть плоскости можно наложить всеми ее точками на другое место этой или другой плоскости. И пр.

Укажем еще следующие аксиомы, относящиеся до всякого рода величин:

Если две величины равны порознь одной и той же третьей величине, то они равны и между собой.

Если к равным величинам придадим поровну или от равных величин отнимем поровну, то равенство не нарушится.

Если к неравным величинам придадим поровну или от неравных величин отнимем поровну, то смысл неравенства не изменится, т. е. бóльшая величина останется большей.

Теоремы. Так называются предложения, которых истинность обнаруживается только после некоторого рассуждения (доказательства). Примером могут служить следующие предложения: если центральные углы равны, то и соответствующие им дуги равны; если при пересечении двух прямых между собой один из четырех углов окажется прямой, то и остальные три угла прямые. И пр.

Следствия. Так называются предложения, которые составляют непосредственный вывод из аксиомы или из теоремы. Например, из аксиомы: «через две точки можно провести только одну прямую» — следует, что две прямые могут пересечься только в одной точке.

28. Состав теоремы. Во всякой теореме можно различить две части: условие и заключение. Условие выражает то, что предполагается данным; заключение — то, что требуется доказать. Например,

[1] Подробнее об определениях и аксиомах изложено ниже, § 86—89.

в теореме: «если центральные углы равны, то и соответствующие им дуги равны» — условием служит первая часть теоремы: «если центральные углы равны», а заключением — вторая часть: «то и соответствующие дуги равны»; другими словами, нам дано (нам известно), что центральные углы равны, а требуется доказать, что при этом условии и соответствующие дуги должны быть равны.

Условие и заключение теоремы могут иногда состоять из нескольких отдельных условий и заключений; например, в теореме: «если число делится на 2 и на 3, то оно разделится на 6» — условие состоит из двух частей: если число делится на 2 и если число делится на 3.

Полезно заметить, что всякую теорему можно подробно выразить словами так, что ее условие будет начинаться словом «если», а заключение — словом «то». Например, теорему: «вертикальные углы равны» — можно подробнее высказать так: «е с л и два угла вертикальные, т о они равны».

29. Обратная теорема. Теоремой, обратной данной теореме, называется такая, в которой условием поставлено заключение или часть заключения данной теоремы, а заключением — условие или часть условия данной теоремы. Например, следующие две теоремы обратны друг другу.

«Если центральные углы равны, то и соответствующие дуги равны».	«Если дуги равны, то и соответствующие углы равны».

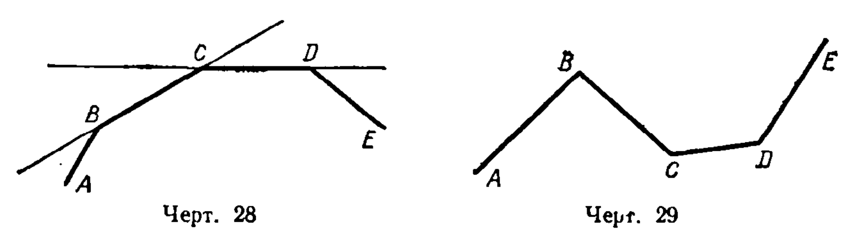
Если одну из этих теорем назовем п р я м о й, то другую следует назвать о б р а т н о й.

В этом примере обе теоремы, и прямая, и обратная, оказываются верными. Но так бывает не всегда. Например, теорема: «если два угла вертикальные, то они равны» — верна, но обратное предложение: «если два угла равны, то они вертикальные» — неверно.

III. ТРЕУГОЛЬНИКИ И МНОГОУГОЛЬНИКИ

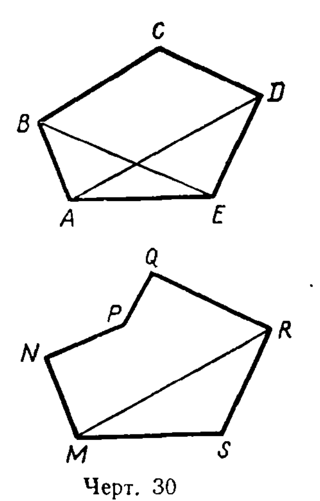
Понятие о многоугольнике и треугольнике

30. Ломаная линия. Линия называется ломаной, когда она состоит из отрезков прямой, не расположенных на одной прямой (черт. 28 или 29). Эти отрезки называются *сторонами* ломаной, а вершины углов, образуемых соседними отрезками,— *вершинами* ее. Ломаная линия обозначается рядом букв, поставленных у ее вершин и концов; например, говорят: «ломаная $ABCDE$».



Черт. 28 Черт. 29

Ломаная линия называется *выпуклой*, если она вся расположена по одну сторону от к а ж д о г о составляющего ее отрезка, продолженного неопределенно. Такова, например, линия, изображенная на черт. 28, тогда как ломаная на черт. 29 не будет выпуклой.



Черт. 30

Когда концы ломаной сходятся в одну точку, то она называется *замкнутой*.

31. Многоугольник. Фигура, образованная замкнутой ломаной линией, называется многоугольником (черт. 30). Стороны этой ломаной называются *сторонами* многоугольника, углы, составленные каждыми двумя соседними сторонами,— *углами* многоугольника, а их вершины — *вершинами* его. Сама ломаная линия, ограничивающая многоугольник, называется *контуром* его, а сумма всех сторон — *периметром*.

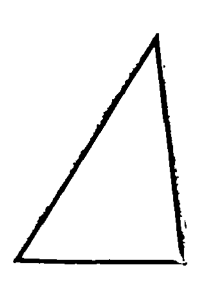
Многоугольник называется *выпуклым*, если он ограничен выпуклой ломаной линией; таков, например, многоугольник $ABCDE$, изображенный на черт. 30 (многоугольник $MNPQRS$ нельзя назвать выпуклым); мы будем рассматривать только выпуклые многоугольники.

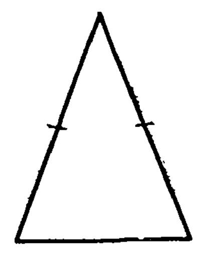
Всякая прямая (как AD, BE, MR, ..., черт. 30), которая соединяет вершины двух углов многоугольника, не прилежащих к одной стороне, называется *диагональю* многоугольника.

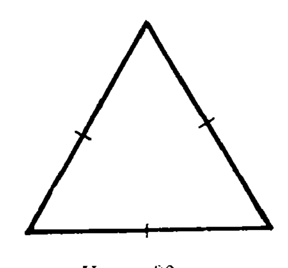
Наименьшее число сторон в многоугольнике — т р и. По числу сторон многоугольник называется треугольником, четырехугольником, пятиугольником и т. д.

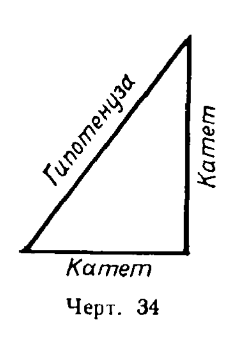
32. Разделение треугольников. Треугольники разделяются по сравнительной длине их сторон или по величине их углов. Относительно длины сторон они бывают *разносторонние* (черт. 31), когда все стороны различной длины, *равнобедренные* (черт. 32), когда две стороны одинаковы, и *равносторонние* (черт. 33), когда все стороны равны.

Относительно величины углов треугольники бывают *остроугольные* (черт. 31), когда все углы острые, *прямоугольные* (черт. 34), когда в числе углов есть прямой, и *тупоугольные* (черт. 35), когда в числе углов есть тупой.




Черт. 32

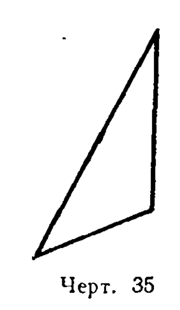

Черт. 33



Черт. 34

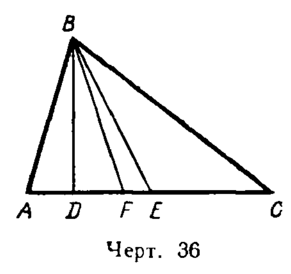
В прямоугольном треугольнике стороны, образующие прямой угол, называются *катетами*, а сторона, лежащая против этого угла,— *гипотенузой*.

33. Главнейшие линии в треугольнике. Одну из сторон треугольника обыкновенно называют *основанием*, вершину противоположного угла — *вершиной* треугольника, а перпендикуляр, опущенный из вершины на основание или на его продолжение,— *высотой* его. Так, если в треугольнике ABC (черт. 36 или 37) за основание взята сторона AC, то B будет вершина, BD — высота треугольника.


Черт. 35

В равнобедренном треугольнике основанием называют обыкновенно ту сторону, которая не принадлежит к равным; тогда вершина равнобедренного треугольника будет вершиной того угла его, который образован равными сторонами.

Конечная прямая BE (черт. 36 или 37), соединяющая вершину какого-нибудь угла треугольника с серединою противоположной стороны, называется *средней линией* или *медианой*. Конечная прямая BF, делящая какой-нибудь угол треугольника пополам, называется равноделящей угла треугольника или его *биссектрисою* (биссектриса вообще не совпадает ни с медианой, ни с высотой).



Черт. 36

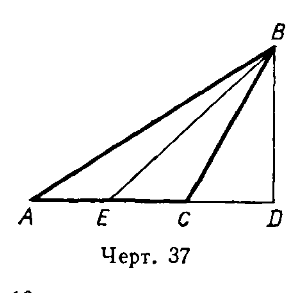
Во всяком треугольнике есть три медианы, три биссектрисы и три высоты.

Свойства равнобедренного треугольника

34. Т е о р е м ы. 1. **В равнобедренном треугольнике биссектриса угла при вершине есть одновременно и медиана, и высота.**

2. **В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.**

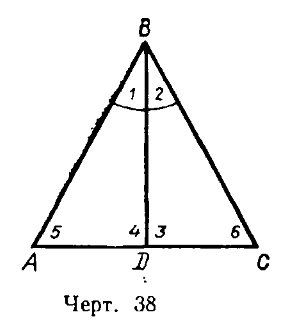
Пусть треугольник ABC (черт. 38) равнобедренный и прямая BD делит пополам угол B при вершине его. Требуется доказать, что эта биссектриса BD есть также и медиана, и высота.



Черт. 37

Вообразим, что $\triangle ABD$ повернут вокруг стороны BD, как около оси, так, чтобы он упал на $\triangle BDC$. Тогда вследствие равенства углов 1 и 2 сторона AB упадет на BC, а вследствие равенства этих сторон точка A совпадет

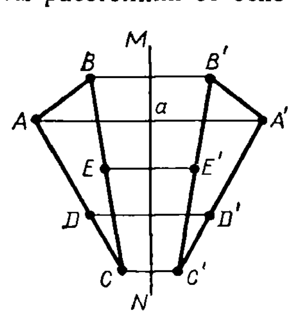
с C. Поэтому DA совместится с DC, угол 4 с углом 3 и угол 5 с углом 6; значит, $DA=DC$, $\angle 4=\angle 3$ и $\angle 5=\angle 6$. Из того, что $DA=DC$, следует, что BD есть медиана; из того, что углы 3 и 4 равны, выходит, что эти углы прямые, и, следовательно, BD есть высота треугольника; и, наконец, углы при основании треугольника 5 и 6 равны.



Черт. 38

35. Следствие. Мы видим, что в равнобедренном треугольнике ABC (черт. 38) одна и та же прямая BD обладает четырьмя свойствами: она есть биссектриса угла при вершине, медиана, проведенная к основанию, высота, опущенная на основание, и, наконец, перпендикуляр к основанию, восставленный из его середины. Так как каждое из этих четырех свойств вполне определяет положение прямой BD, то существование одного из них влечет за собой все остальные. Например, **высота, опущенная на основание равнобедренного треугольника, служит одновременно биссектрисой угла при вершине, медианой, проведенной к основанию, и перпендикуляром к основанию в его середине.**

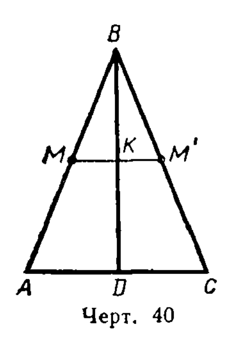
36. Ось симметрии. Если какие-нибудь две точки A и A' (черт. 39) расположены по разные стороны от прямой MN на одном и том же перпендикуляре к этой прямой и на одинаковом расстоянии от основания перпендикуляра ($Aa=A'a$), то такие точки называются *симметричными* относительно прямой MN.



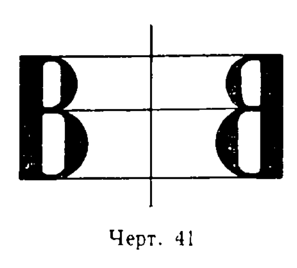
Черт. 39

Две фигуры (или две части одной и той же фигуры) называются симметричными относительно прямой MN, если каждой точке A, B, C, D, E, . . . (черт. 39) одной фигуры (или одной части фигуры) соответствуют симметричные точки A', B', C', D', E', . . . другой фигуры (или другой части фигуры). Прямая MN в таком случае называется *осью симметрии*. Здесь слово «ось» применено потому, что если часть плоскости, лежащую по одну сторону от прямой MN (например, левую часть), станем вращать вокруг MN, как около оси, до тех пор, пока эта часть плоскости не упадет на ту часть, которая лежит по другую сторону от прямой MN (на правую часть), то симметричные фигуры совместятся, так как точка A упадет в точку A', точка B — в точку B' и т. д.

Обратно, если вращением вокруг некоторой прямой мы можем фигуру, лежащую по одну сторону от этой прямой, совместить с фигурой, лежащей по другую ее сторону, то эти



Черт. 40


Черт. 41

фигуры симметричны относительно оси вращения. Например, мы видели, что равнобедренный треугольник ABC (черт. 40) делится биссектрисой BD на такие два треугольника (левый и правый), которые вращением вокруг биссектрисы могут быть совмещены друг с другом. Из этого можно заключить, что, какую бы точку на левой половине равнобедренного треугольника мы ни взяли, всегда можно на правой его половине найти другую точку, симметричную с первой относительно оси BD. Возьмем, например, на стороне AB точку M. Опустим из нее на BD перпендикуляр MK и продолжим его до пересечения со стороной BC. Мы получим тогда на этой стороне точку M', симметричную с точкой M относительно оси BD. Действительно, если, вращая $\triangle ABD$ вокруг BD, мы его совместим с $\triangle BCD$, то при этом KM пойдет по KM' (по равенству прямых углов), а сторона BA упадет на сторону BC (по равенству углов при точке B); значит, точка M, которая лежит и на KM, и на BA, упадет в точку M', которая лежит и на KM', и на BC. Отсюда видно, что $KM=KM'$. Таким образом, точки M и M' лежат по разные стороны от биссектрисы DB, на одном к ней перпендикуляре и на равных расстояниях от основания этого перпендикуляра; значит, эти точки симметричны относительно оси BD. Таким образом, **в равнобедренном треугольнике биссектриса угла при вершине есть его ось симметрии.**

Подобно этому можно объяснить, что в круге **каждый диаметр есть ось симметрии.**

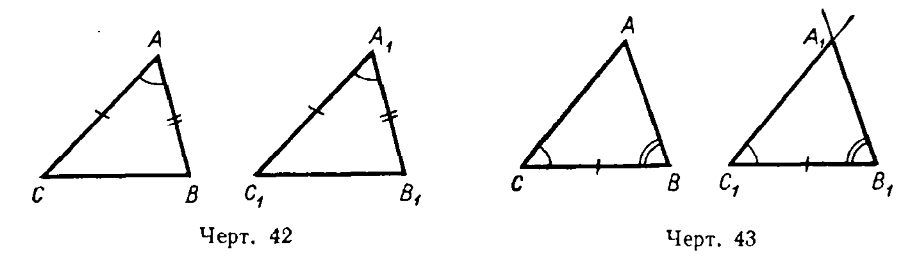
З а м е ч а н и е. Хотя симметричные фигуры вращением вокруг оси симметрии могут быть приведены в совмещение, однако они не тождественны в своем расположении. Например, буква B, изображенная с левой стороны черт. 41, имеет себе симметричную такую же букву (на правой половине чертежа), но перевернутую слева направо. Подобные изображения мы видим в зеркале, если перед ним поставим какой-нибудь предмет, например печатную страницу книги.

Признаки равенства треугольников

37. Предварительные понятия. Две геометрические фигуры, например два треугольника, называются *равными*, если они при наложении могут быть вполне совмещены. В совмещающихся треугольниках, конечно, должны быть равны все соответствующие элементы их, т. е. стороны, углы, высоты, медианы и биссектрисы. Однако для того, чтобы утверждать равенство двух треугольников, не необходимо знать равенство всех элементов их; достаточно убедиться в равенстве только некоторых из них.

38. Три признака равенства треугольников.

1. Если две стороны и угол, заключенный между ними, одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу, заключенному между ними, другого треугольника, то такие треугольники равны.



Черт. 42

Черт. 43

2. Если два угла и прилежащая к ним сторона одного треугольника соответственно равны двум углам и прилежащей к ним стороне другого треугольника, то такие треугольники равны.

3. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то и такие треугольники равны.

1) Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — два треугольника (черт. 42), у которых

$$A=A_1,\ AC=A_1C_1,\ AB=A_1B_1.$$

Требуется доказать, что эти треугольники равны.

Наложим $\triangle ABC$ на $\triangle A_1B_1C_1$ так, чтобы точка A совпала с A_1 и сторона AC пошла по A_1C_1[1]. Тогда вследствие равенства этих сторон точка C совместится с C_1; вследствие равенства углов A и A_1 сторона AB пойдет по A_1B_1, а вследствие равенства этих сторон точка B упадет в B_1; поэтому сторона CB совместится с C_1B_1 (между двумя точками можно провести только одну прямую), и треугольники совпадут; значит, они равны.

2) Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ (черт. 43) — два треугольника, у которых

$$CB=C_1B_1,\ C=C_1 \text{ и } B=B_1.$$

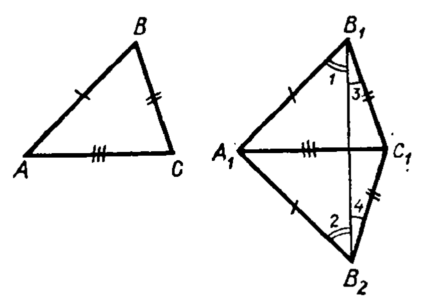
Требуется доказать, что эти треугольники равны.

Наложим $\triangle ABC$ на $\triangle A_1B_1C_1$ так, чтобы точка C совпала с C_1 и сторона CB пошла по C_1B_1. Тогда вследствие равенства этих сторон точка B упадет в B_1, а вследствие равенства углов B и B_1, C и C_1 сторона BA пойдет по B_1A_1 и сторона CA по C_1A_1. Так как две прямые могут пересечься только в одной точке, то вершина A должна совпасть с A_1. Таким образом, треугольники совместятся; значит, они равны.

3) Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ (черт. 44) — два треугольника, у которых

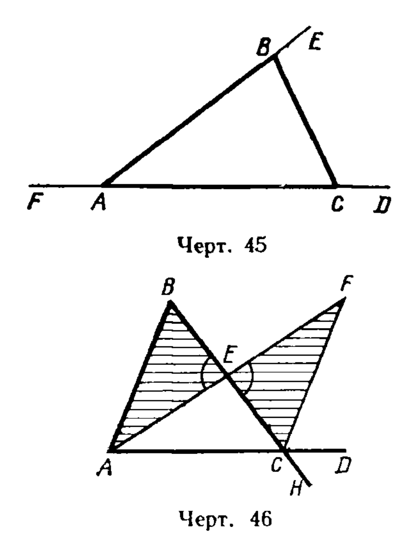
$$AB=A_1B_1,\ BC=B_1C_1 \text{ и } CA=C_1A_1.$$

Требуется доказать, что эти треугольники равны.



Черт. 44

[1] Для выполнения указанных в этом параграфе наложений иногда приходится накладываемый треугольник перевернуть другой стороной.



Черт. 45

Черт. 46

Доказывать этот признак равенства наложением, как мы это делали для первых двух признаков, было бы неудобно, так как, не зная ничего о величине углов, мы не можем утверждать, что при совпадении двух равных сторон совпадут и остальные стороны.

Вместо наложения применим здесь приложение.

Приложим $\triangle ABC$ к $\triangle A_1B_1C_1$ так, чтобы у них совместились равные стороны AC и A_1C_1. Тогда $\triangle ABC$ займет положение $A_1B_2C_1$. Соединив прямой точки B_1 и B_2, мы получим два равнобедренных треугольника $A_1B_1B_2$ и $B_1C_1B_2$ с общим основанием B_1B_2. Но в равнобедренном треугольнике углы при основании равны (34); следовательно, $\angle 1=\angle 2$ и $\angle 3=\angle 4$, а потому $\angle A_1B_1C_1=\angle A_1B_2C_1=\angle B$. Но в таком случае данные треугольники должны быть равны, так как две стороны и угол, заключенный между ними, одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу, заключенному между ними, другого треугольника [1].

Замечание. В равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы и против равных углов лежат равные стороны.

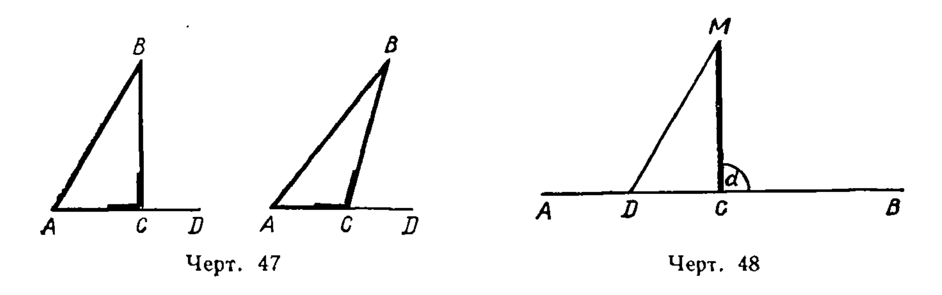
39. Внешний угол треугольника и его свойство. Угол, смежный с каким-нибудь углом треугольника (или многоугольника), называется *внешним углом* треугольника (или многоугольника). Таковы, например, углы (черт. 45) BCD, CBE, FAB. В отличие от внешних углы самого треугольника (или многоугольника) называются *внутренними*.

Внешний угол треугольника больше каждого внутреннего угла его, не смежного с ним.

Например, докажем, что внешний угол BCD треугольника ABC (черт. 46) больше каждого из внутренних углов A и B, не смежных с этим внешним. Для этого через середину E стороны BC проведем медиану AE и продолжим ее на длину EF, равную AE. Соединим F с C прямой. Треугольники ABE и EFC (покрытые штрихами) равны, так как при точке E они имеют по равному углу, заключенному между двумя соответственно равными сторонами. Из равенства их заключаем, что углы B и ECF, лежащие против равных сторон AE и EF, равны. Но угол ECF составляет часть внешнего угла BCD, и потому угол BCD больше угла B.

---

[1] Чтобы прямая B_1B_2 проходила всегда внутри фигуры $A_1B_1C_1B_2$, надо прикладывать треугольники друг к другу так, чтобы общая сторона их A_1C_1 была наибольшая из сторон (или по крайней мере не меньшая двух других).



Черт. 47

Черт. 48

Продолжив сторону BC за точку C, мы получим внешний угол ACH, равный углу BCD. Если из вершины B проведем к стороне AC медиану и продолжим ее на такую же длину за сторону AC, то совершенно так же докажем, что угол ACH больше A и, значит, угол BCD больше A.

40. Следствия. 1. **Если в треугольнике один угол прямой или тупой, то два другие угла острые.**

Действительно, допустим, что какой-нибудь угол C треугольника ABC (черт. 47) будет прямой или тупой; тогда смежный с ним внешний угол BCD должен быть прямой или острый, вследствие этого углы A и B, которые по доказанному меньше внешнего угла, должны быть оба острые.

2. **Из данной точки (M, черт. 48) на данную прямую (AB) можно опустить только один перпендикуляр (MC).**

Действительно, всякая другая прямая MD, проведенная к прямой из той же точки M, будет наклонная, так как угол MDC меньше внешнего угла $MCB=d$, и потому он острый.

Соотношения между сторонами и углами треугольника

41. Теоремы. **Во всяком треугольнике:**

1) **против равных сторон лежат равные углы;**

2) **против большей стороны лежит больший угол.**

1) Если две стороны треугольника равны, то он равнобедренный; тогда углы, лежащие против этих сторон, должны быть равны, как углы при основании равнобедренного треугольника (34).

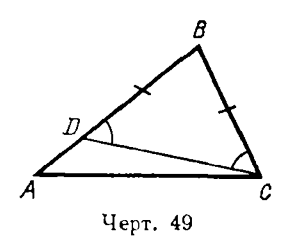
2) Пусть в $\triangle ABC$ (черт. 49) сторона AB больше BC; требуется доказать, что $\angle C$ больше $\angle A$.

Отложим на большей стороне BA от вершины B часть BD, равную меньшей стороне BC, и соединим D с C прямой. Тогда получим равнобедренный $\triangle DBC$, у которого углы при основании равны, т. е. $\angle BDC=\angle BCD$. Но угол BDC, как внешний по отношению к $\triangle ADC$, больше угла A; следовательно, и угол BCD больше угла A, а потому и подавно угол BCA больше угла A; что и требовалось доказать.

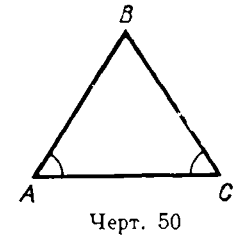
42. Обратные теоремы. **Во всяком треугольнике:**

1) **против равных углов лежат равные стороны;**

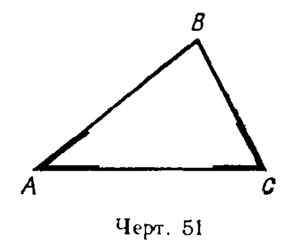
2) **против большего угла лежит большая сторона.**



Черт. 49



Черт. 50



Черт. 51

1) Пусть в $\triangle ABC$ углы A и C равны (черт. 50); требуется доказать, что $BA=BC$. Предположим противное, т. е. что стороны AB и BC не равны. Тогда одна из этих сторон должна быть больше другой, и, следовательно, согласно прямой теореме один из углов A и C должен быть больше другого. Но это противоречит условию, что $A=C$; значит, нельзя допустить, что стороны AB и BC не равны; остается принять, что $AB=BC$.

2) Пусть в $\triangle ABC$ (черт. 51) угол C больше угла A; требуется доказать, что $AB>BC$.

Предположим противное, т. е. что AB не больше BC. Тогда могут представиться два случая: или $AB=BC$, или $AB<BC$. В первом случае согласно прямой теореме угол C был бы равен углу A, во втором случае угол C был бы меньше A; и то и другое противоречит условию; значит, оба эти случая исключаются. Остается один возможный случай, что $AB>BC$.

Следствия. 1. **В равностороннем треугольнике все углы равны;** 2. **В равноугольном треугольнике все стороны равны.**

43. Доказательство от противного. Способ, которым мы только что доказали обратные теоремы, называется доказательством от противного или приведением к нелепости (reductio ad absurdum). Первое название этот способ получил потому, что в начале рассуждения делается предположение, противное (противоположное) тому, что требуется доказать.

Приведением к нелепости он называется вследствие того, что, рассуждая на основании сделанного предположения, мы приходим к нелепому выводу (к абсурду). Получение такого вывода заставляет нас отвергнуть сделанное в начале допущение и принять то, которое требовалось доказать.

Этот прием очень часто употребляется для доказательства обратных теорем.

44. Замечание об обратных теоремах. Относительно равенства или неравенства двух сторон треугольника ABC, например сторон AB и BC, могут представиться только следующие три возможных случая:

$$AB=BC, \quad AB>BC, \quad AB<BC.$$

Каждый из этих трех случаев исключает собой два остальных; так, если имеет место 1-й случай, что $AB=BC$, то одновременно с ним не могут существовать ни 2-й случай, ни 3-й. В теореме **§ 41** мы рас-

смотрели все эти случаи; оказалось, что в каждом из них получаются такие выводы относительно равенства или неравенства противолежащих углов C и A (именно $C=A$, $C>A$, $C<A$), из которых каждый исключает собой все остальные. И мы видели (42), что обратные предложения оказались верными, в чем было легко убедиться доказательством от противного.

Вообще, если в теореме или в ряде теорем мы рассмотрели всевозможные взаимно исключающиеся случаи, которые могут представиться относительно величины или расположения некоторых частей фигуры, причем оказалось, что в этих случаях получаются различные взаимно исключающиеся выводы относительно величины или расположения некоторых других частей фигуры, то мы можем заранее (a priori) утверждать, что обратные предложения верны.

Впоследствии мы неоднократно будем встречаться с этим законом обратимости.

Сравнительная длина прямой и ломаной

45. Теорема. **В треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон, но больше их разности.**

Если в треугольнике возьмем сторону не самую большую, то, конечно, она окажется менее суммы двух других сторон. Значит, нам надо доказать, что даже наибольшая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.

Пусть в $\triangle ABC$ (черт. 52) наибольшая сторона есть AC. Продолжив сторону AB, отложим $BD=BC$ и проведем DC. Так как $\triangle BDC$ равнобедренный, то $\angle D=\angle DCB$; поэтому угол D меньше угла DCA и, следовательно, в $\triangle ADC$ сторона AC меньше AD (42), т. е. $AC<AB+$ $+BD$. Заменив BD на BC, получим: $AC<AB+BC$.

Таким образом, первая часть теоремы доказана.

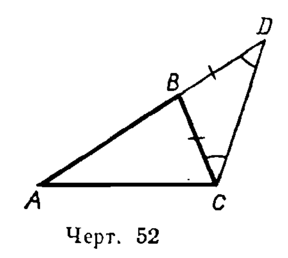
Для доказательства второй части теоремы отнимем от обеих частей выведенного неравенства по AB или по BC:

$$AC-AB<BC \text{ и } AC-BC<AB.$$

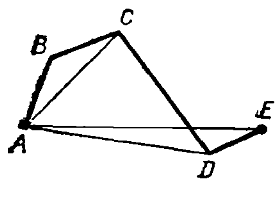
Читая эти неравенства справа налево, видим, что каждая из сторон BC и AB больше разности двух других сторон; так как это же можно, очевидно, сказать и о третьей, наибольшей стороне AC, то, значит, в треугольнике каждая сторона больше разности двух других сторон.

46. Теорема. **Отрезок прямой, соединяющий две какие-нибудь точки, короче всякой ломаной, проведенной между этими точками.**

Если ломаная, о которой говорится здесь, состоит только из двух сторон, то теорема уже была доказана в предыдущем параграфе. Рассмотрим случай, когда ломаная состоит больше чем из двух сторон.



Черт. 52



Черт. 53

Пусть AE (черт. 53) есть отрезок прямой, соединяющий точки A и E, а $ABCDE$ — какая-нибудь ломаная, проведенная между теми же точками. Требуется доказать, что AE короче суммы $AB+BC+CD+DE$.

Соединив A с C и D, находим согласно предыдущей теореме:

$$AE<AD+DE;\ AD<AC+CD;\ AC<AB+BC.$$

Сложим почленно эти неравенства и затем от обеих частей полученного неравенства отнимем по AD и AC, тогда получим:

$$AE<AB+BC+CD+DE.$$

Треугольники с двумя соответственно равными сторонами

47. Т е о р е м ы. **Если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого треугольника, то:**

1) **против большего из углов, заключенных между ними, лежит большая сторона;**

2) обратно, **против большей из остальных сторон лежит больший угол.**

1) Пусть в $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ (черт. 54) дано:

$$AC=A_1C_1,\ AB=A_1B_1 \text{ и } A>A_1.$$

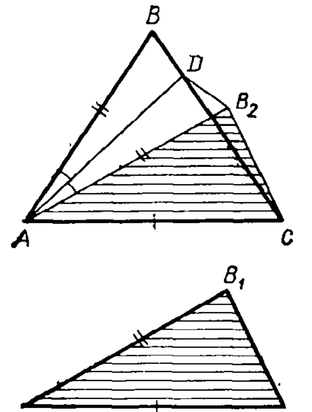
Требуется доказать, что $BC>B_1C_1$. Наложим $\triangle A_1B_1C_1$ на $\triangle ABC$ так, чтобы сторона A_1C_1 совпала с AC. Так как $A_1<A$, то сторона A_1B_1 пойдет внутри угла A; пусть $\triangle A_1B_1C_1$ займет положение AB_2C (вершина B_2 может упасть или вне $\triangle ABC$, или внутри его, или же на стороне BC; доказательство может быть применено ко всем этим случаям). Проведем биссектрису AD угла BAB_2 и соединим D с B_2; тогда получим два треугольника ABD и DAB_2, которые равны, потому что у них AD — общая сторона, $AB=AB_2$ по условию и $\angle BAD=\angle DAB_2$ по делению. Из равенства треугольников следует: $BD=DB_2$. Теперь из $\triangle DCB_2$ выводим: $B_2C<B_2D+DC$ (45) или (заменив B_2D на BD)

$$B_2C<BD+DC, \text{ значит, } B_1C_1<BC.$$

2) Пусть в тех же треугольниках дано $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, но $BC\neq B_1C_1$[1].

Требуется доказать, что если $BC>B_1C_1$, то и $A>A_1$, если же $BC<B_1C_1$, то и $A<A_1$.

Предположим, что $BC>B_1C_1$; докажем, что $A>A_1$. Допустим противное, что A не больше A_1; тогда могут представиться два случая: или $A=A_1$, или $A<A_1$. В первом случае тре-



Черт. 54

[1] Знак $\neq$ означает «не равно».

угольники были бы равны. и, следовательно, сторона BC равнялась бы B_1C_1, что противоречит условию; во втором случае сторона BC (согласно теореме 1) была бы меньше B_1C_1, что также противоречит условию. Значит, оба эти случая исключаются; остается один возможный случай, что $A > A_1$.

Если допустим, что $BC < B_1C_1$, то также докажем, что тогда и $A < A_1$.

IV. СРАВНИТЕЛЬНАЯ ДЛИНА ПЕРПЕНДИКУЛЯРА И НАКЛОННЫХ

48. Теорема. **Перпендикуляр, опущенный из какой-нибудь точки на прямую, короче всякой наклонной, проведенной из той же точки на эту прямую.**

Пусть AB (черт. 55) есть перпендикуляр, опущенный из точки A на прямую MN, и AC — какая-нибудь наклонная, проведенная из той же точки A к прямой MN. Требуется доказать, что $AB < AC$. В $\triangle ABC$ угол B прямой, а угол C острый (40); значит, $C < B$, и потому $AB < AC$.

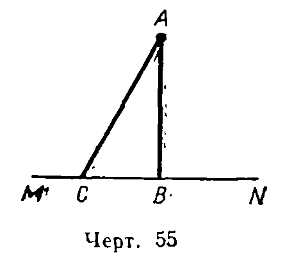
Замечание. Когда говорят: «расстояние точки от прямой», то разумеют кратчайшее расстояние, измеряемое по перпендикуляру, опущенному из этой точки на прямую.

49. Теоремы. **Если из одной и той же точки, взятой вне прямой, проведены к этой прямой перпендикуляр и какие-нибудь наклонные, то:**

1. **Если основания двух наклонных одинаково удалены от основания перпендикуляра, то такие наклонные равны.**

2. **Если основания двух наклонных не одинаково удалены от основания перпендикуляра, то та из наклонных больше, которой основание дальше отстоит от основания перпендикуляра.**

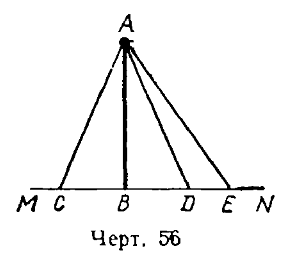
1) Пусть AC и AD (черт. 56) будут две такие наклонные, проведенные из точки A к прямой MN, которых основания C и D одинаково удалены от основания перпендикуляра AB, т. е. $CB = BD$; требуется доказать, что $AC = AD$.



Черт. 55

В треугольниках ABC и ABD есть общая сторона AB и сверх того $BC = BD$ (по условию) и $\angle ABC = \angle ABD$ (как углы прямые); значит, эти треугольники равны и потому $AC = AD$.

2) Пусть AC и AE (черт. 56) будут две такие наклонные, проведенные из точки A к прямой MN, основания которых не одинаково удалены от основания перпендикуляра, например, пусть $BE > BC$; требуется доказать, что $AE > AC$. Отложим $BD = BC$ и проведем AD. По доказанному выше $AD = AC$. Сравним AE с AD. Угол ADE есть внешний по отношению к $\triangle ADB$, и потому он больше



Черт. 56

прямого угла ABD; следовательно, $\angle ADE$ тупой и потому $\angle AED$ должен быть острый (40); значит, $\angle ADE > \angle AED$ и, следовательно, $AE > AD$, и потому $AE > AC$.

50. Обратные теоремы. В предыдущих теоремах рассмотрены всевозможные взаимно исключающиеся случаи относительно равенства расстояний оснований наклонных от основания перпендикуляра; при этом получились взаимно исключающиеся выводы относительно равенства или неравенства наклонных; вследствие этого обратные предложения должны быть верны (44), а именно:

Если из одной и той же точки, взятой вне прямой (черт. 56), проведены к этой прямой перпендикуляр и какие-нибудь наклонные, то:

1. Если две наклонные равны, то их основания одинаково удалены от основания перпендикуляра;

2. Если две наклонные не равны, то основание большей из них дальше отстоит от основания перпендикуляра.

Предоставляем учащимся самим доказать эти предложения (способом от противного).

Признаки равенства прямоугольных треугольников

51. Два признака, не требующие особого доказательства. Так как в прямоугольных треугольниках углы, содержащиеся между катетами, всегда равны, как прямые, то прямоугольные треугольники равны:

1. **Если катеты одного треугольника соответственно равны катетам другого,** или

2. **Если катет и прилежащий к нему острый угол одного треугольника равны соответственно катету и прилежащему к нему острому углу другого треугольника.**

Эти два признака не требуют особого доказательства, так как они представляют лишь частные случаи общих признаков. Докажем еще два следующих признака, относящихся только к прямоугольным треугольникам.

52. Два признака, требующие особого доказательства.

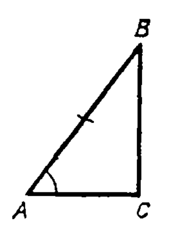
Теоремы. **Прямоугольные треугольники равны:**

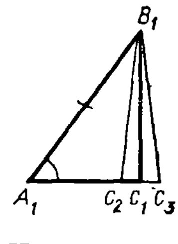
1. **Если гипотенуза и острый угол одного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого;** или

2. **Если гипотенуза и катет одного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого.**

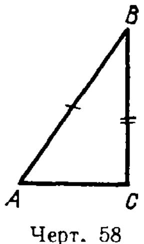
1) Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ (черт. 57) — два прямоугольных треугольника, у которых $AB=A_1B_1$ и $A=A_1$; требуется доказать, что эти треугольники равны.

Наложим $\triangle ABC$ на $\triangle A_1B_1C_1$ так, чтобы у них совместились равные гипотенузы. Тогда по равенству углов A и A_1 катет AC пойдет по A_1C_1. При этом точка C должна совместиться с точкой C_1, потому что если предположим, что она не упадет в точку C_1, то тогда катет BC занял бы положение B_1C_2 или B_1C_3, что невозможно, так как из одной точки B_1 нельзя на прямую A_1C_1 опустить два перпендикуляра (B_1C_1 и B_1C_2 или B_1C_1 и B_1C_3).

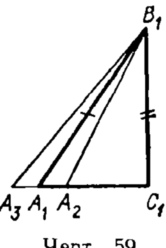




Черт. 57



Черт. 58



Черт. 59

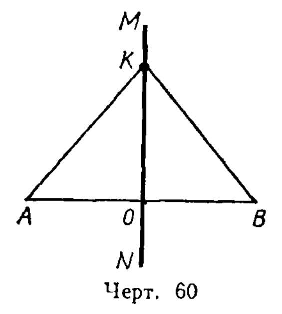
2) Пусть (черт. 58 и 59) в прямоугольных треугольниках дано: $AB=A_1B_1$ и $BC=B_1C_1$; требуется доказать, что треугольники равны.

Наложим $\triangle ABC$ на $\triangle A_1B_1C_1$ так, чтобы у них совместились равные катеты BC и B_1C_1. Тогда по равенству прямых углов CA пойдет по C_1A_1. При этом гипотенуза AB не может не совместиться с гипотенузой A_1B_1, потому что если бы она заняла положение A_2B_1 или A_3B_1, то тогда мы имели бы две равные наклонные (A_1B_1 и A_2B_1 или A_1B_1 и A_3B_1), которые не одинаково удалены от основания перпендикуляра, что невозможно (49).

V. СВОЙСТВО ПЕРПЕНДИКУЛЯРА, ПРОВЕДЕННОГО К ОТРЕЗКУ ПРЯМОЙ ЧЕРЕЗ ЕГО СЕРЕДИНУ, И СВОЙСТВО БИССЕКТРИСЫ УГЛА

53. Оба эти свойства очень сходны между собою. Чтобы лучше видеть это сходство, мы изложим их параллельно.

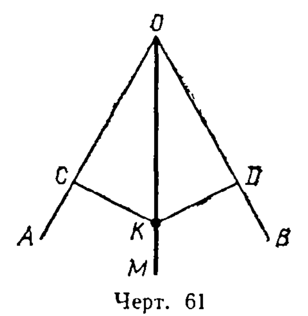
1. **Если какая-нибудь точка** (K, черт. 60) **лежит на перпендикуляре** (MN), **проведенном к отрезку** AB **через его середину, то она одинаково удалена от концов этого отрезка** (т. е. $KA=KB$).



Черт. 60

Так как $MN \perp AB$ и $AO=OB$, то AK и KB суть наклонные к AB, основания которых одинаково удалены от основания перпендикуляра; значит, $KA=KB$.

1. **Если какая-нибудь точка** (K, черт. 61) **лежит на биссектрисе** (OM) **угла** (AOB), **то она одинаково удалена от сторон этого угла** (т. е. перпендикуляры KD и KC равны).



Черт. 61

Так как OM делит угол пополам, то прямоугольные треугольники OCK и ODK, имея общую гипотенузу и равные острые углы при вершине O, равны, и потому $KC=KD$.

2. (Обратная теорема.) **Если какая-нибудь точка** (K, черт. 60) **одинаково удалена от концов отрезка** AB (т. е. если $KA = KB$), **то она лежит на перпендикуляре, проведенном к отрезку** AB **через его середину.**

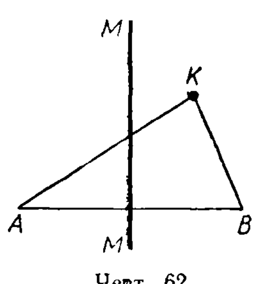
Проведем через K прямую $MN \perp AB$; тогда мы получим два прямоугольных треугольника KAO и KBO, которые, имея общий катет KO и равные гипотенузы, равны, а потому $AO = OB$. Значит, прямая MN, проведенная нами через K перпендикулярно к AB, делит AB пополам.

2. (Обратная теорема.) **Если какая-нибудь точка** (K, черт. 61) **одинаково удалена от сторон угла** (т. е. если перпендикуляры KC и KD равны), **то она лежит на биссектрисе этого угла.**

Через O и K проведем прямую OM. Тогда получим два прямоугольных треугольника OCK и ODK, которые, имея общую гипотенузу и равные катеты CK и DK, равны, а потому равны и углы при вершине O; значит, прямая OM, проведенная нами через K, будет биссектрисой угла AOB.

54. Следствие. Из двух доказанных теорем (прямой и обратной) можно вывести еще следующие теоремы:

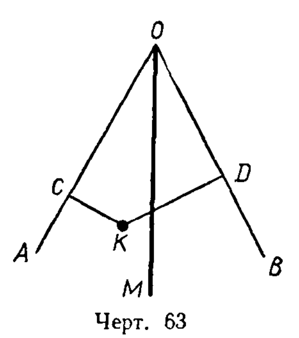
Если какая-нибудь точка (K, черт. 62) **не лежит на перпендикуляре** (MN), **проведенном к отрезку** (AB) **через его середину, то она не одинаково удалена от концов этого отрезка** (т. е. KA не равно KB).



Черт. 62

Действительно, если бы точка K была одинаково удалена от A и B, то по доказанному в теореме 2 предыдущего параграфа она лежала бы на MN, что противоречит заданию.

Если какая-нибудь точка (K, черт. 63) **не лежит на биссектрисе** (OM) **угла** (AOB), **то она не одинаково удалена от сторон этого угла** (т. е. перпендикуляры KC и KD не равны между собой).



Черт. 63

Действительно, если бы точка K была одинаково удалена от сторон угла, то по доказанному в теореме 2 предыдущего параграфа она лежала бы на биссектрисе MO, что противоречит заданию.

55. Замечание о противоположных теоремах. Если условие и заключение какой-нибудь теоремы представляют собой отрицание

условия и заключения другой теоремы, то первая называется теоремой, противоположной второй. Теорема, изложенная нами сейчас (и для отрезка, и для угла), противоположна теореме 1 (прямой) предыдущего параграфа. Можно было бы изложить еще и теорему, противоположную обратной. Так, «если какая-нибудь точка *не* одинаково удалена от концов отрезка, то она *не* лежит на перпендикуляре, проведенном через середину этого отрезка».

Таким образом, одной и той же теореме (прямой) могут соответствовать еще три теоремы: обратная, противоположная прямой и противоположная обратной. Полезно заметить, что между этими четырьмя теоремами есть такая зависимость: **если верны теоремы, прямая и обратная, то верны и теоремы, противоположные прямой и обратной.** Пример этому мы сейчас видели. Впоследствии мы встретимся и с другими примерами подобного рода.

56. Геометрическое место. Геометрическим местом точек, обладающих некоторым свойством, называется такая линия или поверхность или совокупность линий и поверхностей (вообще такая фигура), которая содержит в себе все точки, обладающие этим свойством, и не содержит ни одной точки, не обладающей им.

Из теорем предыдущих параграфов следует:

геометрическое место точек, одинаково удаленных от двух данных точек, есть перпендикуляр, проведенный к отрезку прямой, соединяющему эти точки, через его середину;

геометрическое место точек, одинаково удаленных от сторон угла, есть биссектриса этого угла.

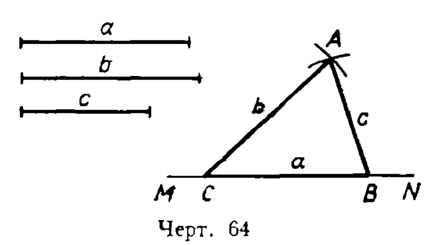
VI. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ

57. Предварительное замечание. Теоремы, доказанные нами в предыдущих главах, позволяют решать некоторые задачи на построение. Заметим, что в элементарной геометрии рассматриваются только такие построения, которые могут быть выполнены с помощью линейки и циркуля (употребление чертежного треугольника и некоторых других приборов хотя и допускается ради сокращения времени, но не составляет необходимости).

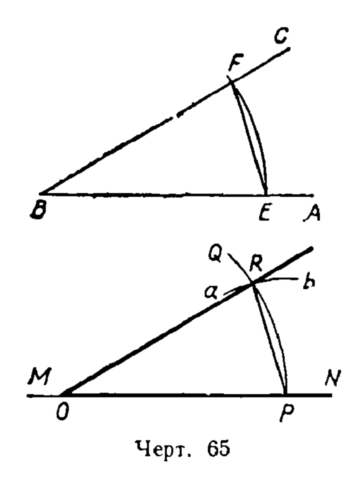
58. Задача 1. Построить треугольник по трем его сторонам a, b и c (черт. 64).

На какой-нибудь прямой MN откладываем часть CB, равную одной из данных сторон, например a. Из точек C и B как центров описываем две небольшие дуги: одну радиусом, равным b, другую радиусом, равным c. Точку A, в которой эти дуги пересекаются, соединяем с B и C. Треугольник ABC будет искомый.

Замечание. Не всякие три отрезка прямой могут служить сторонами треугольника; для этого необходимо, чтобы больший из них был меньше суммы двух остальных (45).



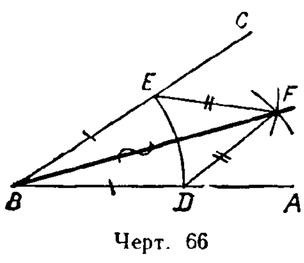
Черт. 64



Черт. 65

59. Задача 2. На данной прямой MN (черт. 65) при данной на ней точке O построить угол, равный данному углу ABC.

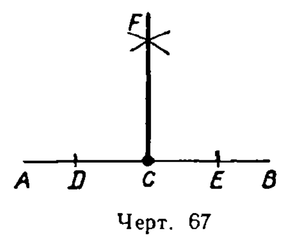
Из вершины B как центра описываем произвольным радиусом между сторонами данного угла дугу EF; затем, не изменяя растворения циркуля, переносим его острие в точку O и описываем дугу PQ. Далее, из точки P как центра описываем дугу ab радиусом, равным расстоянию между точками E и F. Наконец, через точки O и R (пересечение двух дуг) проводим прямую. Угол ROP равен углу ABC, потому что треугольники ROP и FBE, имеющие соответственно равные стороны, равны.



Черт. 66

60. Задача 3. Разделить данный угол ABC пополам (черт. 66); другими словами, построить биссектрису данного угла или провести его ось симметрии.

Из вершины B как центра произвольным радиусом опишем между сторонами угла дугу DE. Затем, взяв произвольное растворение циркуля, большее, однако, половины расстояния между точками E и D (см. замечание к задаче 1), описываем этим растворением из точек D и E небольшие дуги, которые пересекутся в какой-нибудь точке F. Проведя прямую BF, мы получим биссектрису угла ABC.



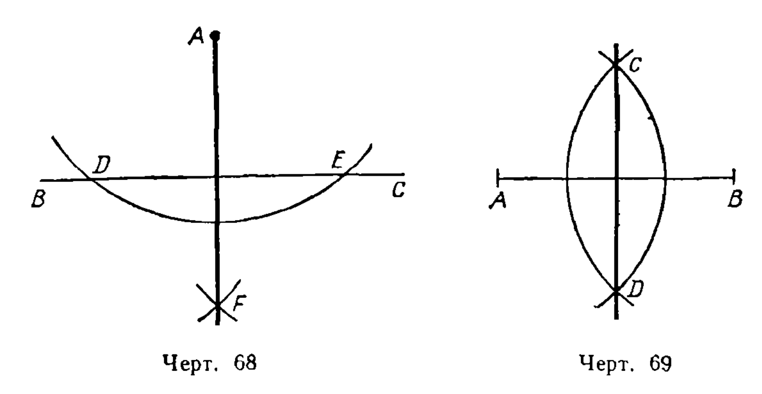
Черт. 67

Для доказательства соединим прямыми точку F с D и E; тогда получим два треугольника BEF и BDF, которые равны, так как у них BF — общая сторона, $BD=BE$ и $DF=EF$ по построению. Из равенства треугольников следует: $\angle ABF=\angle CBF$.

61. Задача 4. Из данной точки C прямой AB восстановить к этой прямой перпендикуляр (черт. 67).

Отложим на AB по обе стороны от данной точки C равные отрезки (произвольной длины) CD и CE. Из точек E и D одним и тем же растворением циркуля (бо́льшим, однако, CD) опишем две небольшие дуги, которые пересекутся в некоторой точке F. Прямая, проведенная через точки C и F, будет искомым перпендикуляром.

Действительно, как видно из построения, точка F одинаково удалена от D и E; следовательно, она должна лежать на перпендикуляре,



Черт. 68 Черт. 69

проведенном к отрезку DE через его середину (53); но середина этого отрезка есть C, а через C и F можно провести только одну прямую; значит, $FC \perp DE$.

62. З а д а ч а 5. И з д а н н о й т о ч к и A о п у с т и т ь п е р п е н д и к у л я р н а д а н н у ю п р я м у ю BC (черт. 68).

Из точки A как центра произвольным растворением циркуля (бóльшим, однако, расстояния от A до BC) опишем дугу, которая пересечется с BC в каких-нибудь двух точках D и E. Затем из этих точек произвольным, но одним и тем же растворением циркуля (бóльшим, однако, $^1/_2$ DE) проводим две небольшие дуги, которые пересекутся между собой в некоторой точке F. Прямая AF будет искомым перпендикуляром.

Действительно, как видно из построения, каждая из точек A и F одинаково удалена от D и E, а такие точки лежат на перпендикуляре, проведенном к отрезку DE через его середину (53).

63. З а д а ч а 6. П р о в е с т и п е р п е н д и к у л я р к д а н н о м у о т р е з к у п р я м о й (AB) ч е р е з е г о с е р е д и н у (черт. 69); другими словами, построить ось симметрии отрезка AB.

Из точек A и B произвольным, но одинаковым растворением циркуля (бóльшим $^1/_2$ AB) описываем две дуги, которые пересекутся между собой в некоторых точках C и D. Прямая CD будет искомым перпендикуляром.

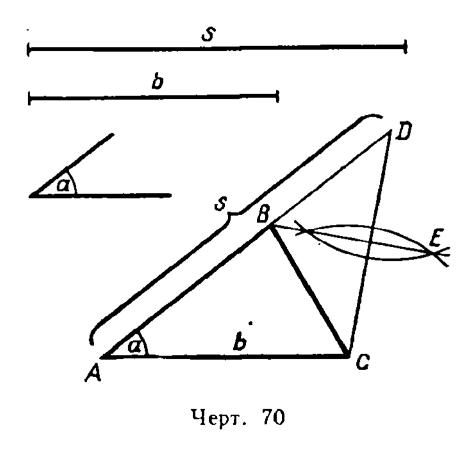
Действительно, как видно из построения, каждая из точек C и D одинаково удалена от A и B; следовательно, эти точки должны лежать на перпендикуляре, проведенном к отрезку AB через его середину.

З а д а ч а 7. Р а з д е л и т ь п о п о л а м д а н н ы й о т р е з о к п р я м о й (черт. 69). Решается так же, как предыдущая задача.

64. Пример более сложной задачи. При помощи этих основных задач можно решать задачи более сложные. Для примера решим следующую задачу.

З а д а ч а. Построить треугольник, зная его основание b, угол a, прилежащий к основанию, и сумму s двух боковых сторон (черт. 70).

Чтобы составить план решения, предположим, что задача решена, т. е. что найден такой $\triangle ABC$, у которого основание $AC=b$, угол $A=a$ и $AB+BC=s$. Рассмотрим теперь полученный чертеж. Сторону AC,



Черт. 70

равную b, и угол A, равный a, мы построить умеем. Значит, остается найти на другой стороне угла A такую точку B, чтобы сумма $AB+BC$ равнялась s. Продолжив AB, отложим отрезок AD, равный s. Теперь вопрос приводится к тому, чтобы на прямой AD отыскать такую точку B, которая была бы одинаково удалена от C и D. Такая точка, как мы знаем (53), должна лежать на перпендикуляре, проведенном к отрезку CD через его середину. Точка B найдется в пересечении этого перпендикуляра с AD.

Итак, вот решение задачи: строим (черт. 70) угол A, равный данному углу a; на сторонах его откладываем $AC=b$ и $AD=s$. Через середину отрезка прямой CD проводим перпендикуляр BE; пересечение его с AD, т. е. точку B, соединяем с C. $\triangle ABC$ будет искомый, так как он удовлетворяет всем требованиям задачи: у него $AC=b$, $\angle A=a$ и $AB+BC=s$ (потому что $BD=BC$).

Рассматривая построение, мы замечаем, что задача возможна не при всяких данных. Действительно, если сумма s задана слишком малой сравнительно с b, то перпендикуляр EB может не пересечь отрезка AD (или пересечет его продолжение за точку A или за точку D); в этом случае задача окажется невозможной. И независимо от построения можно видеть, что задача невозможна, если $s<b$ или $s=b$, потому что не может быть такого треугольника, у которого сумма двух сторон была бы меньше или равна третьей стороне.

В том случае, когда задача возможна, она имеет только одно решение, т. е. существует только один треугольник, удовлетворяющий требованиям задачи, так как пересечение перпендикуляра BE с прямой AD может быть только в одной точке.

65. Замечание. Из приведенного примера видно, что решение сложной задачи на построение состоит из следующих четырех частей:

1. Предположив, что задача решена, делают от руки приблизительный чертеж искомой фигуры и затем, внимательно рассматривая начерченную фигуру, стремятся найти такие зависимости между данными задачи и искомыми, которые позволили бы свести задачу на другие, известные ранее. Эта самая важная часть решения задачи, имеющая целью составить план решения, носит название анализа.

2. Когда таким образом план решения найден, выполняют сообразно ему построение.

3. Для проверки правильности плана доказывают затем на основании известных теорем, что полученная фигура удовлетворяет всем требованиям задачи. Эта часть называется синтезом.

4. Затем задаются вопросом, при всяких ли данных задача возможна, допускает ли она одно решение или несколько и нет ли в за-

даче каких-либо особенных случаев, когда построение упрощается или, наоборот, усложняется. Эта часть решения называется исследованием задачи.

Когда задача весьма проста и не может быть сомнения относительно ее возможности, то обыкновенно анализ и исследование опускают, а указывают прямо построение и приводят доказательство. Так мы делали, излагая решение первых семи задач этой главы; также будем делать и впоследствии, когда нам придется излагать решение несложных задач.

УПРАЖНЕНИЯ

Доказать теоремы

8. В равнобедренном треугольнике две медианы равны, две биссектрисы равны, две высоты равны.

9. Если из середины каждой из равных сторон равнобедренного треугольника восставим перпендикуляры до пересечения с другой из равных сторон, то эти перпендикуляры равны.

10. Перпендикуляры, восставленные к двум сторонам угла на равных расстояниях от вершины, пересекаются на биссектрисе.

11. Прямая, перпендикулярная к биссектрисе угла, отсекает от его сторон равные отрезки.

12. Медиана треугольника меньше его полупериметра.

13. Медиана треугольника меньше полусуммы сторон, между которыми она заключается. Указание. Продолжить медиану на расстояние, равное ей, полученную точку соединить с одним концом стороны, к которой проведена медиана, и рассмотреть образовавшуюся фигуру.

14. Сумма медиан треугольника меньше периметра, но больше полупериметра.

15. Сумма диагоналей четырехугольника меньше его периметра, но больше полупериметра.

16. Доказать, как прямую теорему, что всякая точка, не лежащая на перпендикуляре, проведенном к отрезку прямой через его середину, не одинаково удалена от концов этого отрезка, а именно она ближе к тому концу, с которым она расположена по одну сторону от перпендикуляра.

17. Доказать, как прямую теорему, что всякая точка, не лежащая на биссектрисе угла, не одинаково отстоит от сторон его.

18. Медиана, исходящая из какой-нибудь вершины треугольника, равно отстоит от двух других его вершин.

19. На одной стороне угла A отложены отрезки AB и AC и на другой стороне отложены отрезки $AB'=AB$ и $AC'=AC$. Доказать, что прямые BC' и $B'C$ пересекаются на биссектрисе угла A.

20. Вывести отсюда способ построения биссектрисы угла.

21. Если A' и A, B' и B — две пары точек, симметричные относительно какой-нибудь прямой XY, то четыре точки A, A', B, B' лежат на одной окружности.

22. Дан острый угол XOY и точка A внутри этого угла. Найти на стороне OX точку B и на стороне OY точку C так, чтобы периметр $\triangle ABC$ был наименьший.
Указание. Надо взять точки, симметричные с A относительно сторон OX и OY.

Задачи на построение

23. Построить сумму двух, трех и более данных углов.

24. Построить разность двух углов.

25. По данной сумме и разности двух углов найти эти углы.

26. Разделить угол на 4, 8, 16 равных частей.

27. Через вершину данного угла провести вне его такую прямую, которая со сторонами угла образовала бы равные углы.

28. Построить треугольник: а) по двум сторонам и углу между ними; б) по стороне и двум прилежащим углам; в) по двум сторонам и углу, лежащему против боль-

шей из них; г) по двум сторонам и углу, лежащему против меньшей из них (в этом случае получаются два решения, или одно, или ни одного).

29. Построить равнобедренный треугольник: а) по основанию и боковой стороне; б) по основанию и прилежащему углу; в) по боковой стороне и углу при вершине; г) по боковой стороне и углу при основании.

30. Построить прямоугольный треугольник: а) по двум катетам; б) по катету и гипотенузе; в) по катету и прилежащему острому углу.

31. Построить равнобедренный треугольник: а) по высоте и боковой стороне; б) по высоте и углу при вершине; в) по основанию и перпендикуляру, опущенному из конца основания на боковую сторону.

32. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и острому углу.

33. Через точку, данную внутри угла, провести такую прямую, которая отсекла бы от сторон угла равные части.

34. Через точку, данную вне угла, провести такую прямую, которая отсекла бы от сторон угла равные части.

35. По данной сумме и разности двух прямых найти эти прямые.

36. Разделить данную конечную прямую на 4, 8, 16 равных частей.

37. На данной прямой найти точку, одинаково удаленную от двух данных точек (вне прямой).

38. Найти точку, равноотстоящую от трех вершин треугольника.

39. На прямой, пересекающей стороны угла, найти точку, одинаково удаленную от сторон этого угла.

40. Найти точку, одинаково удаленную от трех сторон треугольника.

41. На бесконечной прямой AB найти такую точку C, чтобы полупрямые CM и CN, проведенные из C через данные точки M и N, расположенные по одну сторону от AB, составляли с полупрямыми CA и CB равные углы.

42. Построить прямоугольный треугольник по катету и сумме гипотенузы с другим катетом.

43. Построить треугольник по основанию, углу, прилежащему к основанию, и разности двух других сторон (рассмотреть два случая: 1) когда дан м е н ь ш и й из двух углов, прилежащих к основанию; 2) когда дан б о л ь ш и й из них).

44. Построить прямоугольный треугольник по катету и разности двух других сторон.

45. Дан угол A и точки B и C, расположенные одна на одной стороне угла, другая на другой. Найти: 1) точку M, равноотстоящую от сторон угла, и такую, чтобы $MC=MB$; 2) точку N, равноотстоящую от сторон угла, причем было бы $NC=CB$, и 3) точку P такую, чтобы точки B и C одинаково отстояли от A и P.

46. По соседству с железной дорогой расположены две деревни A и B. Найти на линии железной дороги (имеющей прямолинейную форму) место для станции, которая была бы одинаково удалена от A и B.

47. Дан угол A и точка B на одной из его сторон. Найти на другой стороне такую точку C, чтобы сумма $CA+CB$ была равна данной длине.

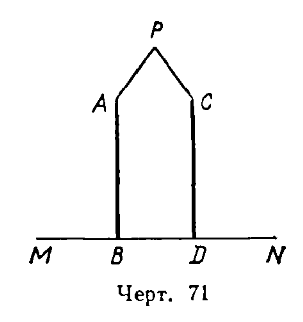
VII. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ

Основные теоремы

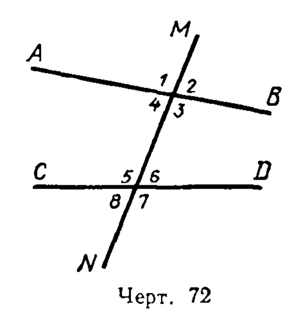
66. Определение. Две прямые называются *параллельными*, если, находясь в одной плоскости, они *не пересекаются*, сколько бы мы их ни продолжали.

Параллельность прямых обозначается письменно знаком ||, поставленным между обозначениями прямых; так, если прямые AB и CD параллельны, то пишут: $AB \parallel CD$. Возможность существования параллельных прямых обнаруживается следующей теоремой.

67. Т е о р е м а. **Два перпендикуляра** (AB и CD, черт. 71) **к одной и той же прямой** (MN) **не могут пересечься,** сколько бы мы их ни продолжали.



Черт. 71



Черт. 72

Действительно, если бы эти перпендикуляры пересеклись в какой-нибудь точке P, то тогда из этой точки на прямую MN были бы опущены два перпендикуляра, а это невозможно.

68. Названия углов, получаемых при пересечении двух прямых третьей. Пусть две прямые AB и CD (черт. 72) пересечены третьей прямой MN. Тогда получаются 8 углов (мы их обозначили цифрами), которые попарно носят следующие названия:

соответственные углы: 1 и 5, 4 и 8, 2 и 6, 3 и 7;

накрест лежащие углы: 3 и 5, 4 и 6 (внутренние); 1 и 7, 2 и 8 (внешние);

односторонние углы: 4 и 5, 3 и 6 (внутренние); 1 и 8, 2 и 7 (внешние).

69. Признаки параллельности.

Если при пересечении двух прямых (AB и CD, черт. 73) **третьей прямой** (MN):

какие-нибудь соответственные углы равны;

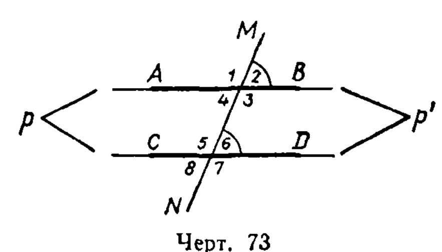
или какие-нибудь накрест лежащие углы равны;

или сумма каких-нибудь двух внутренних или двух внешних односторонних углов равна $2d$,

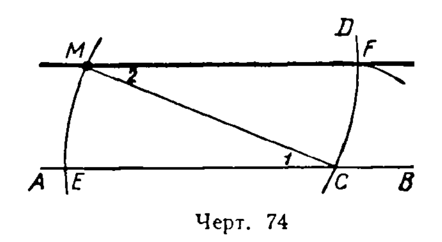
то первые две прямые параллельны.

Пусть, например, дано, что соответственные углы 2 и 6 равны; требуется доказать, что в таком случае $AB \| CD$.

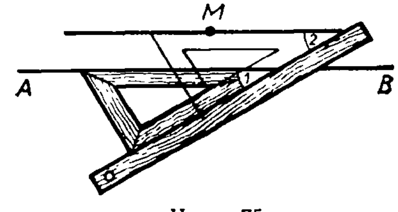
Предположим противное, т. е. что прямые AB и CD не параллельны; тогда эти прямые пересекутся в какой-нибудь точке p', лежащей направо от MN, или в какой-нибудь точке p, лежащей налево от MN. Если пересечение будет в p', то образуется треугольник, в котором $\angle 2$ будет внешним, а $\angle 6$ внутренним, несмежным с внешним углом 2, и, значит, тогда $\angle 2$ должен быть больше $\angle 6$ (39), что противоречит заданию; значит, пересечься в какой-нибудь точке p', лежащей направо от MN, прямые AB и CD не могут. Если предположим, что пересечение будет в точке p, то тогда образуется треугольник, у которого $\angle 4$, равный $\angle 2$, будет внутренним, а $\angle 6$ — внешним, несмеж-



Черт. 73



Черт. 74



Черт. 75

ным с внутренним $\angle 4$; тогда $\angle 6$ должен быть больше $\angle 4$ и, следовательно, больше $\angle 2$, что противоречит заданию. Значит, прямые AB и CD не могут пересечься и в точке, лежащей налево от MN; следовательно, эти прямые нигде не пересекаются, т. е. они параллельны.

Подобным же образом доказывается, что $AB \| CD$, если $\angle 1 = \angle 5$ или $\angle 3 = \angle 7$ и т. д.

Пусть еще дано, что $\angle 4 + \angle 5 = 2d$. Тогда мы должны заключить, что $\angle 4 = \angle 6$, так как $\angle 6$ в сумме с $\angle 5$ тоже составляет $2d$. Но если $\angle 4 = \angle 6$, то прямые не могут пересечься, так как в противном случае углы 4 и 6 не могли бы быть равными (один был бы внешний, а другой внутренний, несмежный с ним).

70. Задача. Через данную точку M (черт. 74) провести прямую, параллельную данной прямой AB.

Наиболее простое решение этой задачи состоит в следующем: из точки M как из центра описываем произвольным радиусом дугу CD и из точки C тем же радиусом дугу ME. Затем, дав циркулю растворение, равное расстоянию от E до M, описываем из точки C небольшую дугу, которая пересечется с CD в некоторой точке F. Прямая MF будет параллельна AB.

Для доказательства проведем вспомогательную прямую MC; образовавшиеся при этом углы 1 и 2 равны по построению, а если накрест лежащие углы равны, то линии параллельны.

Параллельные прямые весьма удобно проводятся также с помощью треугольника и линейки, как это видно из чертежа 75.

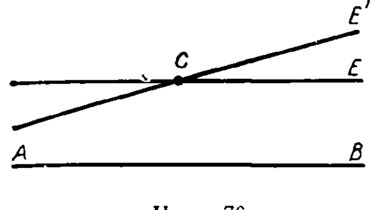
71. Аксиома параллельных линий.

Через одну и ту же точку нельзя провести двух различных прямых, параллельных одной и той же прямой.

Так, если (черт. 76) $CE \| AB$, то никакая другая прямая CE', проведенная через точку C, не может быть параллельной AB, т. е. она при продолжении пересечется с AB.

Доказательство той истины оказывается невозможным; ее принимают как необходимое допущение или требование (постулат — postulatum).

72. Следствия. 1. **Если прямая** (CE', черт. 76) **пересекается с одной из параллельных** (CE), **то она пересекается и с другой** (AB), потому что в противном случае через одну и ту же точку C проходили бы две различные прямые, параллельные AB, что невозможно.



Черт. 76

Черт. 77

2. **Если каждая из двух прямых A и B** (черт. 77) **параллельна одной и той же третьей прямой** (C), **то они параллельны между собою.**

Действительно, если предположим, что прямые A и B пересекаются в некоторой точке M, то тогда через эту точку проходили бы две различные прямые, параллельные C, что невозможно.

73. Теорема (обратная теореме § 69). **Если две параллельные прямые** (AB и CD, черт. 78) **пересечены какой-нибудь прямой** (MN), **то:**

1) **соответственные углы равны;**

2) **накрест лежащие углы равны;**

3) **сумма внутренних односторонних углов равна** $2d$;

4) **сумма внешних односторонних углов равна** $2d$.

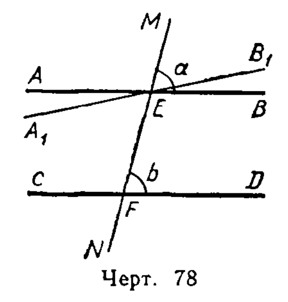
Докажем, например, что если $AB \| CD$, то соответственные углы a и b равны.

Предположим противное, т. е. что эти углы не равны (например, пусть $a > b$). Построив $\angle MEB_1 = \angle b$, мы получим тогда прямую A_1B_1, не сливающуюся с AB, и следовательно, будем иметь две различные прямые, проходящие через точку E и параллельные одной и той же прямой CD (именно $AB \| CD$ согласно условию теоремы и $A_1B_1 \| CD$ вследствие равенства соответственных углов MEB_1 и b). Так как это противоречит аксиоме параллельных линий, то наше предположение, что углы a и b не равны, должно быть отброшено; остается принять, что $a = b$.

Таким же путем можно доказать и остальные заключения теоремы.

74. Следствие. **Перпендикуляр к одной из двух параллельных прямых есть также перпендикуляр и к другой.**

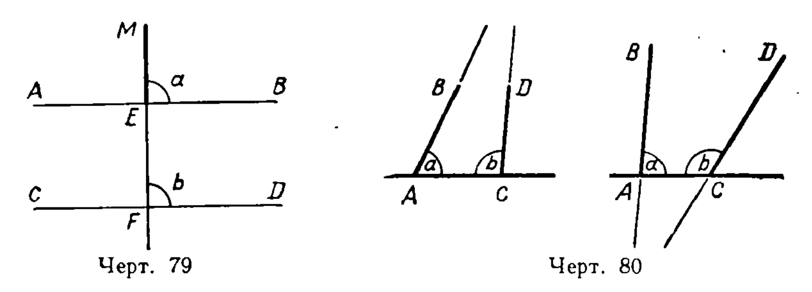
Действительно, если $AB \| CD$ (черт. 79) и $ME \perp AB$, то, во-первых, ME, пересекаясь с AB, пересекается и с CD в некоторой точке F; во-вторых, соответственные углы a и b равны Но угол a прямой; значит, и угол b прямой, т. е. $ME \perp CD$.



Черт. 78

75. **Признаки непараллельности прямых.** Из двух теорем: прямой, выражающей признаки параллельности (69), и ей обратной (73), можно вывести заключение, что противоположные теоремы также верны, т. е. что:

если при пересечении двух прямых третьей окажется, что: 1) соответственные углы не



Черт. 79 Черт. 80

равны или 2) внутренние накрест лежащие углы не равны и т. д., то прямые не параллельны;

если две прямые не параллельны, то при пересечении их третьей прямой: 1) соответственные углы не равны, 2) внутренние накрест лежащие углы не равны и т. д.

Из этих признаков непараллельности полезно обратить особое внимание на следующий:

если сумма внутренних односторонних углов (a и b, черт. 80) **не равна** $2d$, **то прямые** (AB и CD) **при достаточном продолжении пересекаются,** так как если бы эти прямые не пересекались, то они были бы параллельны и тогда сумма внутренних односторонних углов равнялась бы $2d$ (73), что противоречит условию.

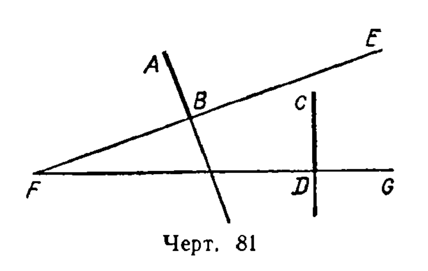
Это предложение (дополненное утверждением, что прямые пересекутся по ту сторону от секущей линии, по которой сумма внутренних односторонних углов меньше $2d$) было принято знаменитым греческим геометром ***Евклидом*** (жившим в III в. до н. э.) в его «Началах геометрии» без доказательства, как аксиома параллельных линий, и потому оно известно под именем п о с т у л а т а Е в к л и д а.

В настоящее время предпочитают принимать за такую аксиому более простую истину, а именно ту, которую мы изложили раньше (71).

Укажем еще следующий признак непараллельности, который понадобится нам впоследствии.

Две прямые (AB и CD, черт. 81), **перпендикулярные к двум пересекающимся прямым** (FE и FG), **пересекаются.**

Действительно, если предположим противное, т. е. что $AB \| CD$, то прямая FD, будучи перпендикулярна к одной из параллельных (к CD), была бы перпендикулярна и к другой параллельной (к AB), и тогда из одной точки F к прямой AB были бы проведены два перпендикуляра: FB и FD, что невозможно.

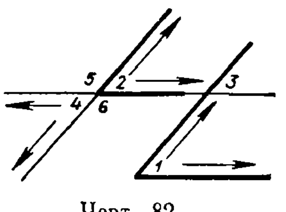


Черт. 81

Углы с соответственно параллельными или перпендикулярными сторонами

76. Т е о р е м а. **Если стороны одного угла соответственно параллельны сторонам другого угла, то такие углы или равны, или в сумме составляют два прямых.**

Рассмотрим особо следующие три случая (черт. 82):



Черт. 82

1. Пусть стороны угла 1 соответственно параллельны сторонам угла 2 и, сверх того, имеют одинаковое направление от вершины (на чертеже направления указаны стрелками). Продолжив одну из сторон угла 2 до пересечения с непараллельной ей стороной угла 1, мы получим угол 3, равный и углу 1, и углу 2 (как соответственные при параллельных); следовательно, $\angle 1 = \angle 2$.

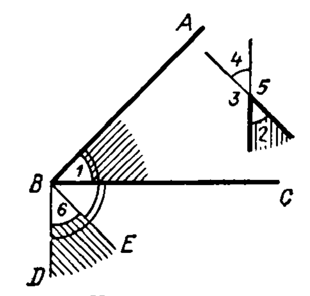
2. Пусть стороны угла 1 соответственно параллельны сторонам угла 4, но имеют противоположное направление от вершины. Продолжив обе стороны угла 4, мы получим угол 2, который равен углу 1 (по доказанному выше) и углу 4 (как вертикальные); следовательно, $\angle 4 = \angle 1$.

3. Пусть, наконец, стороны угла 1 соответственно параллельны сторонам угла 5 или 6, причем две из этих сторон имеют одинаковое направление, а две другие противоположное. Продолжив одну сторону угла 5 или угла 6, мы получим угол 2, который равен (по доказанному) углу 1; но $\angle 5$ (или $\angle 6$)$+\angle 2 = 2d$ (по свойству смежных углов); следовательно, и $\angle 5$ (или $\angle 6$)$+\angle 1 = 2d$.

Таким образом, углы с параллельными сторонами оказываются равными, когда их стороны имеют или одинаковое, или противоположное направление от вершины; если же это условие не выполнено, то углы составляют в сумме $2d$.

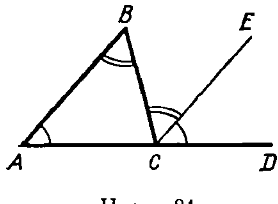
77. Теорема. **Если стороны одного угла соответственно перпендикулярны к сторонам другого угла, то такие углы или равны, или в сумме составляют два прямых.**

Пусть угол ABC, обозначенный цифрой 1 (черт. 83), есть один из данных углов; за другой данный угол возьмем какой-нибудь из четырех углов: 2, 3, 4 или 5, образованных двумя пересекающимися прямыми, из которых одна перпендикулярна к стороне AB, а другая — к стороне BC. Проведем из вершины угла 1 две вспомогательные прямые: $BD \perp BC$ и $BE \perp BA$. Образованный ими угол 6 равен углу 1 по следующей причине: углы DBC и EBA равны, так как оба они прямые; отняв от каждого из них по одному и тому же углу EBC, получим: $\angle 6 = \angle 1$. Теперь заметим, что стороны вспомогательного угла 6 параллельны пересекающимся прямым, образующим углы 2, 3, 4 и 5 (потому что два перпендикуляра к одной прямой параллельны); следовательно, эти углы или равны углу 6, или составляют с ним в сумме $2d$. Заменив угол 6 равным ему углом 1, получим то, что требовалось доказать.



Черт. 83

Сумма углов треугольника и многоугольника



Черт. 84

78. Т е о р е м а. **Сумма углов треугольника равна двум прямым.**

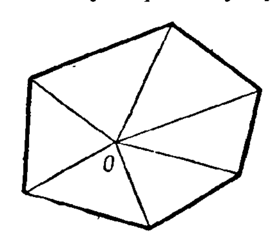
Пусть ABC (черт. 84) — какой-нибудь треугольник; требуется доказать, что сумма углов A, B и C равна $2d$ (т. е. 180°).

Продолжив сторону AC и проведя $CE \parallel AB$, найдем: $\angle A = \angle ECD$ (как углы соответственные при параллельных), $\angle B = \angle BCE$ (как углы накрест лежащие при параллельных); следовательно, $\angle A + \angle B + \angle C = \angle ECD + \angle BCE + \angle C = 2d = 180°$.

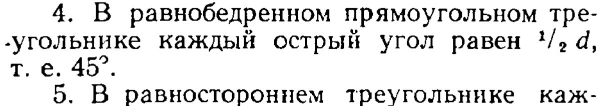
С л е д с т в и я. 1. Всякий внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, несмежных с ним (так, $\angle BCD = \angle A + \angle B$).

2. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то и третьи углы равны.

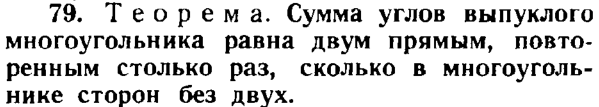
3. Сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна одному прямому углу, т. е. 90°.



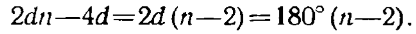
Черт. 85


4. В равнобедренном прямоугольном треугольнике каждый острый угол равен $^1/_2\, d$, т. е. 45°.

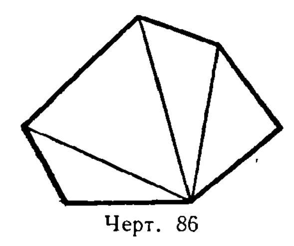
5. В равностороннем треугольнике каждый угол равен $^2/_3 d$, т. е. 60°.

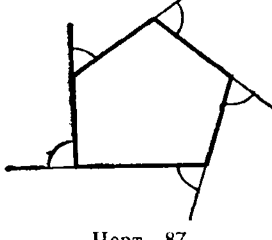

79. Т е о р е м а. **Сумма углов выпуклого многоугольника равна двум прямым, повторенным столько раз, сколько в многоугольнике сторон без двух.**

Взяв внутри многоугольника (черт. 85) произвольную точку O, соединим ее со всеми вершинами. Тогда выпуклый многоугольник разобьется на столько треугольников, сколько в нем сторон. Сумма углов каждого треугольника равна $2d$, следовательно, сумма углов всех треугольников равна $2dn$, если n означает число сторон многоугольника. Эта величина, очевидно, превышает сумму углов многоугольника на сумму всех тех углов, которые расположены вокруг точки O; но эта сумма равна $4d$ (**26**,2); следовательно, сумма углов многоугольника равна:



$$2dn - 4d = 2d(n-2) = 180°(n-2).$$


Черт. 86


Черт. 87

З а м е ч а н и е. Эту теорему можно доказать еще и так. Из вершины какого-нибудь угла многоугольника проведем все его диагонали (черт. 86). Тогда многоугольник разобьется на столько треугольников, сколько

в многоугольнике сторон без двух. Действительно, если не будем считать двух сторон, образующих угол, из вершины которого проведены диагонали, то на каждую из остальных сторон придется по одному треугольнику. Значит, всех треугольников будет $n-2$, если n означает число всех сторон многоугольника. Но в каждом треугольнике сумма углов равна $2d$; значит, сумма углов всех треугольников будет $2d(n-2)$; но эта сумма и есть сумма всех углов многоугольника.

80. Теорема. **Если из вершины каждого угла выпуклого многоугольника проведем продолжение одной из сторон этого угла, то сумма всех образовавшихся при этом внешних углов равна четырем прямым** (независимо от числа сторон многоугольника).

Каждый из таких внешних углов (черт. 87) составляет дополнение до $2d$ к смежному с ним внутреннему углу многоугольника; следовательно, если к сумме всех внутренних углов приложим сумму всех внешних углов, то получим $2dn$ (где n — число сторон); но сумма внутренних углов, как мы видели, равна $2dn-4d$; следовательно, сумма внешних углов равна разности:

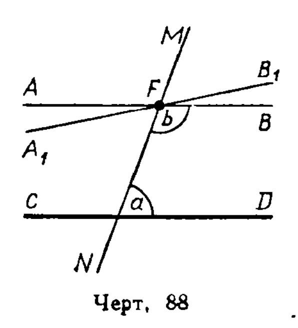
$$2dn-(2dn-4d)=2dn-2dn+4d=4d=360^\circ.$$

О постулате параллельных линий (понятие о неевклидовых геометриях)

81. Легко показать, что так называемый 5-й постулат Евклида (указанный в § 75 этой книги) и постулат, принятый нами (§ 71) в основание теории параллельных линий (введенный впервые английским математиком Джоном Плейфером в 1795 г.), обратимы один в другой, т. е. из постулата Плейфера можно вывести как логическое следствие постулат Евклида (что и сделано в этой книге) и, обратно, из этого постулата можно логически получить постулат Плейфера. Последнее можно выполнить, например, так:

пусть через точку F (черт. 88), взятую вне прямой CD, проведены какие-нибудь две прямые AB и A_1B_1; докажем, исходя из постулата Евклида, что эти прямые не могут быть обе параллельны одной и той же прямой CD.

Для этого проведем через F какую-нибудь секущую прямую MN; обозначим внутренние односторонние углы, образуемые этой секущей с прямыми CD и AB, буквами a и b. Тогда одно из двух: или сумма $a+b$ не равна $2d$, или она равна $2d$. В первом случае согласно постулату Евклида прямая AB должна пересечься с CD и, следовательно, она не может быть параллельной CD; во втором случае сумма $a+\angle B_1FN$ окажется неравной $2d$ (так как угол B_1FN не равен углу BFN); значит, тогда согласно тому же постулату прямая A_1B_1 должна пересечься с CD и, следовательно, эта прямая не может быть параллельной CD. Таким образом, по крайней мере одна из прямых AB и A_1B_1 непременно окажется непараллельной прямой CD; следовательно, через одну точку нельзя провести двух различных прямых, параллельных одной и той же прямой.



Черт. 88

82. Существует очень много и других предложений, также логически обратимых с постулатом Евклида (и, следовательно, ему логически равносильных). Укажем, например, следующие предложения, которые некоторыми известными геометрами ставились в основание теории параллельных линий:

существует по крайней мере один треугольник, у которого сумма углов равна $2d$ (французский математик Лежандр, в начале XIX столетия);

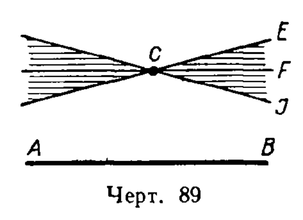
существует выпуклый четырехугольник (прямоугольник), у которого все четыре угла прямые (французский математик Клод Клеро, XVIII столетие);

существует треугольник, подобный, но неравный другому треугольнику (итальянский математик Саккери, начало XVIII столетия);

через всякую точку, взятую внутри угла, меньшего $2d$, можно провести прямую, пересекающую обе стороны этого угла (немецкий математик Лоренц, конец XVIII столетия). И др.

83. Весьма многие математики, начиная с древних времен и до конца первой четверти XIX столетия, делали неоднократные попытки доказать постулат Евклида (или какой-нибудь другой, ему равносильный), т. е. вывести его как логическое следствие из других аксиом геометрии. Все эти попытки оказались, однако, неудачными: в каждом из таких «доказательств» после подробного разбора его можно было всегда найти какую-нибудь логическую ошибку.

Постоянные неудачи в поисках доказательств евклидова постулата привели некоторых математиков к мысли, что этот постулат (или ему равносильный) и не может быть выведен из других аксиом геометрии, а представляет собой независимое от них самостоятельное допущение о свойствах пространства. Впервые эту мысль обстоятельно развил русский математик, профессор Казанского университета Н. И. Лобачевский (1793—1856)[1]. В своем сочинении «Новые начала геометрии», появившемся в 1835—1838 гг., он обнародовал особую геометрию (названную потом геометрией Лобачевского), в основание которой положены те же геометрические аксиомы, на которых основана геометрия Евклида, за исключением только его постулата параллельных линий, вместо которого Лобачевский взял следующее допущение: **через точку, лежащую вне данной прямой, можно провести бесчисленное множество прямых, не пересекающихся с данной;** именно он допустил, что если AB есть прямая (черт. 89) и C — какая-нибудь точка вне ее, то при этой точке существует некоторый угол ICE, обладающий тем свойством, что всякая прямая, проведенная через C внутри этого угла (например, прямая CF), а также и обе стороны его не пересекаются с AB, сколько бы их ни продолжали, тогда как всякая прямая, проведенная через C вне этого угла, пересекается с AB. Понятно, что такое допущение отрицает постулат Евклида, так как при существовании этого угла нельзя утверждать, что всякие две прямые пересекаются, коль скоро они с секущей образуют внутренние односторонние углы, сумма которых не равна двум прямым углам. Несмотря, однако, на это отрицание, геометрия Лобачевского представляет собой такую же стройную систему геометрических теорем, как и геометрия Евклида (хотя, конечно, теоремы геометрии Лобачевского существенно отличаются от теорем геометрии Евклида); в ней, как и в геометрии Евклида, не встречается никаких логических противо-



Черт. 89

[1] Еще раньше Лобачевского знаменитый немецкий математик Гаусс (1778—1855) пришел к выводу, что «необходимость нашей геометрии не может быть доказана»; но свои изыскания в этом вопросе Гаусс не опубликовал.

речий ни теорем с аксиомами, положенными в основание этой геометрии, ни одних теорем с другими теоремами. Между тем если бы постулат Евклида мог быть доказан, т. е. если бы он представлял собой некоторое, хотя бы и очень отдаленное, логическое следствие из других геометрических аксиом, то тогда **отрицание** этого постулата, положенное в основу геометрии вместе с **принятием** всех других аксиом, непременно привело бы к логическим противоречивым следствиям. Отсутствие таких противоречий в геометрии Лобачевского служит указанием на независимость 5-го постулата Евклида от прочих геометрических аксиом и, следовательно, на невозможность доказать его.

84. Почти одновременно с Лобачевским, независимо от него, венгерский математик **Иоанн Болиаи** (1802—1860) также построил новую геометрию, исходя из того же допущения, как и Лобачевский, что через точку, взятую вне прямой, можно провести бесчисленное множество параллельных этой прямой.

Позже их немецкий математик **Риман** (1826—1866) показал возможность построения еще особой, также лишенной противоречий геометрии (названной потом геометрией Римана), в которой вместо постулата Евклида принимается допущение, что **через точку, взятую вне прямой, нельзя провести ни одной параллельной этой прямой** (другими словами, все прямые плоскости пересекаются).

Все те геометрии (как Лобачевского и Римана), в которых в основание положено какое-нибудь допущение о параллельных линиях, логически несовместное с постулатом Евклида, носят общее название **неевклидовых** геометрий.

85. Приведем некоторые теоремы геометрии Лобачевского, резко отличающиеся от соответствующих теорем геометрии Евклида:

два перпендикуляра к одной и той же прямой, по мере удаления от этой прямой, расходятся неограниченно;

сумма углов треугольника меньше $2d$ (в геометрии Римана она больше $2d$), причем эта сумма не есть величина постоянная для разных треугольников;

чем больше площадь треугольника, тем больше сумма его углов разнится от $2d$;

если в выпуклом четырехугольнике три угла прямые, то четвертый угол острый (значит, в этой геометрии прямоугольники невозможны);

если углы одного треугольника соответственно равны углам другого треугольника, то такие треугольники равны (следовательно, в геометрии Лобачевского не существует подобия);

геометрическое место точек плоскости, равноотстоящих от какой-нибудь прямой этой плоскости, есть некоторая кривая линия [1].

VIII. ОБ ОСНОВНЫХ ПОНЯТИЯХ И АКСИОМАХ В ГЕОМЕТРИИ

86. Строго научная геометрия представляет собой, с одной стороны, ряд определений, выраженных при помощи других определений, установленных ранее; с другой стороны,— цепь теорем, логически выведенных из других теорем и определений, доказанных и установленных ранее. Восходя в этой цепи теорем и определений все выше и выше, мы должны наконец дойти до таких предложений, которые не определяются и не доказываются, а принимаются как основа для дальнейших определений и теорем. Эти неопределяемые и недоказываемые предложения можно подразделить на два рода: 1) **основные понятия**, принимаемые без определений, и 2) **аксиомы** (или **постулаты**), принимаемые без доказательства.

[1] Обстоятельное изложение начал неевклидовой геометрии см. в кн: Успенский Я. Введение в неевклидову геометрию Лобачевского — Болиаи, 1922.

У Евклида в его «Началах» не встречается указаний на основные понятия; у него все понятия так или иначе определяются. Так, в самом начале его книги выставлены следующие

Определения

1. Точка есть то, что не имеет частей.

2. Линия есть длина без ширины.

3. Границы линии суть точки.

4. Прямая линия есть та, которая одинаково расположена относительно всех своих точек.

5. Поверхность есть то, что имеет только длину и ширину.

6. Границы поверхности суть линии.

7. Плоскость есть поверхность, которая одинаково расположена относительно всех своих прямых.

К этим определениям в начале стереометрии Евклид добавляет еще два:

8. Телом называется то, что имеет длину, ширину и глубину.

9. Границы тела суть поверхности.

Критика этих определений обнаруживает их существенные недостатки.

Во-первых, некоторые понятия определяются дважды; например, точка определяется и как то, что не имеет частей, и как то, что составляет границу линий; то же самое можно сказать о линии (определения 2-е и 6-е) и о поверхности (определения 5-е и 9-е).

Во-вторых, некоторые определения не вполне ясны (например, 4-е и 7-е); в-третьих, они сами заключают в себе понятия, которые раньше не были определены, а именно *длина*, *ширина*, *глубина*.

Таким образом, эти евклидовы предложения представляют собой не основные понятия, а только некоторые описания простейших объектов геометрии. Конечно, с такими (или подобными им) описаниями полезно ознакомить учащихся, начинающих обучаться геометрии, но для обоснования научной геометрии они бесполезны.

В современной науке такие понятия, как *точка*, *прямая* и *плоскость*, принимаются без определений как основные. Кроме этих понятий, принимаются без определений и некоторые другие, которые мы укажем ниже.

В тех же «Началах» Евклида приводятся следующие постулаты (требования) и аксиомы (Евклид различал постулаты от аксиом; теперь математики не делают различия между теми и другими).

Постулаты

Требуется, чтобы:

1. От каждой точки до каждой другой точки можно было провести одну прямую линию.

2. Ограниченную прямую можно было непрерывно продолжать по прямой линии.

3. Из любого центра можно было описать окружность любым радиусом.

4. Все прямые углы были равны.

5. Если прямая при пересечении с двумя другими прямыми образует с ними внутренние односторонние углы, которые вместе меньше двух прямых, то требуется, чтобы эти прямые, будучи продолжены неограниченно, пересекались с той стороны, с которой лежат углы, которые вместе меньше двух прямых.

Аксиомы

1. Равные одному и тому же равны между собой.
2. Если к равным прибавить равные, то суммы будут равны.
3. Если от равных отнять равные, то остатки будут равны.
4. Совмещающиеся друг с другом равны.
5. Целое больше своей части.

Перечисленные постулаты и аксиомы Евклида также вызывают веские возражения. Например, 4-й постулат представляет собой теорему, которая может быть доказана; 5-й постулат (постулат параллельности) [1] выражен очень сложно. Предложения, выделенные Евклидом под названием «аксиомы», относятся не только к геометрическим величинам, но и к величинам вообще (кроме 4-й аксиомы, которая должна бы попасть в группу «постулатов», так как говорит о пространственном совмещении).

87. Ученые позднейших времен (главным образом XIX и XX столетий) стремились установить такую систему аксиом, которая была бы необходима и достаточна для строгого логического обоснования всей области геометрии без помощи какого бы то ни было другого допущения и не прибегая совсем к очевидности (к интуиции). Приведем здесь следующую систему, установленную в главных чертах немецким математиком Давидом Гильбертом. Мы изложим вкратце эту систему в том виде (с небольшими изменениями), как это сделано в книге проф. С. А. Богомолова «Основания геометрии» (1923, с. 44 и след.). Система эта разделяется на пять следующих групп:

I. Аксиомы сочетания

(Основные понятия: точка, прямая, плоскость.)

1. Две различные точки определяют одну и только одну проходящую через них прямую.
2. На всякой прямой имеются по крайней мере две различные точки.
3. Три точки, не лежащие на одной прямой, определяют одну и только одну проходящую через них плоскость.
4. Во всякой плоскости имеются по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.
5. Если две точки прямой лежат в некоторой плоскости, то эта прямая всеми своими точками принадлежит указанной плоскости.
6. Если две плоскости имеют общую точку, то у них есть по крайней мере еще одна общая точка.
7. В пространстве имеются по крайней мере четыре точки, не лежащие в одной плоскости.

II. Аксиомы расположения (или порядка)

(Основное понятие: предшествовать в данном направлении [2]; свойства этого понятия высказываются в следующих пяти аксиомах, в которых буквами A, B, C обозначены какие-либо точки прямой.)

---

[1] В некоторых изданиях «Начал» Евклида постулат параллельности значится как одиннадцатая аксиома.

[2] У Гильберта вместо этого понятия за основное взято понятие «между». Но итальянский геометр Вайляти установил, что это понятие сводится к более простому: «предшествовать», или «следовать». Так, если на прямой есть три точки A, B и C и A предшествует (в данном направлении) B и B предшествует (в том же направлении) C, то B лежит «между» A и C.

1. Если A предшествует B, то B не предшествует A.

2. Если A предшествует B и B предшествует C, то A предшествует C.

3. Если A и B — две различные точки прямой, то либо A предшествует B, либо B предшествует A.

Прежде чем указать четвертую и пятую аксиомы этой группы, надо условиться, что выражение «B следует за A» равносильно выражению «A предшествует B».

4. Если A и B — различные точки прямой, то на этой прямой существует третья точка, следующая за одной из первых двух точек и предшествующая другой (т. е. есть третья точка, лежащая «между» A и B).

5. Нет точки на прямой, которая предшествовала бы всем остальным точкам этой прямой, и нет точки, которая следовала бы за всеми остальными точками ее.

Последняя, шестая, аксиома (известная под названием «постулата Паша», так как она была указана этим немецким математиком) состоит в следующем:

6. Пусть A, B, C — три различные точки, не лежащие на одной прямой, и пусть на плоскости, содержащей эти три точки, проведена какая-нибудь прямая, не проходящая ни через одну из точек A, B, C; тогда если эта прямая пересекает один из трех отрезков: AB, BC, CA, то она пересекает и один из двух остальных [1].

III. Аксиомы равенства (конгруэнции)

(Основные понятия: равенство отрезков и равенство углов.)

Свойства этих понятий выражаются в следующих аксиомах:

1. Всякий отрезок (или угол) равен самому себе.

2. Если один отрезок (угол) равен другому, то этот другой равен первому.

3. Если один отрезок (угол) равен второму, а второй равен третьему, то и первый равен третьему.

4. Пусть AB есть какой-нибудь отрезок и C — произвольная точка пространства; тогда на всякой полупрямой, исходящей из C, существует одна и только одна такая точка D, что отрезок $CD=AB$.

5. Если на прямой точка A предшествует B, а B предшествует C, и если на той же или на другой прямой точка A' предшествует B', а B' предшествует C', и если, кроме того, $AB=A'B'$, $BC=B'C'$, то и $AC=A'C'$.

6. Пусть дана плоскость и на ней полупрямая, исходящая из некоторой точки A; пусть еще дан какой-нибудь угол. Тогда на этой плоскости, по каждую сторону от полупрямой, можно построить один и только один угол, равный данному и вершина которого совпадает с точкой A и одна сторона — с данной полупрямой.

7. Если две стороны и угол, определяемый ими, одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу, определяемому ими, другого треугольника, то и прочие углы треугольника соответственно равны.

Мы видим, таким образом, что перечисленные аксиомы равенства существенно отличаются от тех предложений, которые мы встречаем в школьных учебниках (и у самого Евклида). В этих учебниках говорится, что два отрезка, два угла, два треугольника и вообще две какие-нибудь геометрические фигуры считаются равными, если они при наложении могут быть вполне совмещены. Значит, этим определением допускается движение геометрических фигур (ведь для того, чтобы нало-

---

[1] Другими словами, если прямая, лежащая в плоскости $\triangle ABC$, не проходит ни через какую его вершину и пересекается с какой-нибудь стороной этого треугольника, то она пересекается и с какой-нибудь из остальных двух сторон.

жить одну фигуру на другую, надо переместить какую-нибудь из них). Но двигаться могут только материальные тела (материальная точка, материальная линия и пр.). Геометрические же фигуры в научной геометрии суть «объекты чистого мышления, которые не могут быть передвигаемы» [1]. Всякое движение материальных предметов совершается во времени, причем движущееся тело перемещается из одного положения в другое, переходя через все промежуточные положения. Между тем для геометрических целей важны только начальный и конечный пункты этого движения, а время и промежуточные положения не имеют никакого значения. Вот для избежания ссылок на движение и установлены в чистой геометрии особые аксиомы равенства отрезков и углов. Можно и в геометрии допустить движение, но в особом смысле, как преобразование одной части пространства в другую, преобразование, характеризуемое некоторыми особыми свойствами. Если такое преобразование назвать геометрическим движением и основные его свойства выразить в соответствующих постулатах (например, всякому движению соответствует обратное движение, два последовательных движения могут быть заменены одним движением и т. п.), то таким воображаемым движением можно пользоваться в геометрии и тогда вместо указанных аксиом равенства нужно поставить аксиомы движения, как это и делают некоторые геометры.

IV. Аксиома непрерывности

Предложена немецким математиком Дедекиндом. Мы выскажем эту аксиому словами самого Дедекинда [2]:

если все точки прямой разделены на два класса такого рода, что каждая точка первого класса лежит влево от каждой точки второго класса (иначе сказать, каждая точка первого класса предшествует каждой точке второго класса), **то существует на этой прямой одна и только одна точка, которая производит это разделение прямой на два класса** [3] (самое эту точку можно отнести либо к первому классу, либо ко второму — безразлично).

---

[1] Вебер и Вельштейн. Энциклопедия элементарной математики, т. II, с. 45.

[2] См.: Дедекинд. Непрерывность и иррациональные числа. Одесса, 1906.

[3] Чтобы ясно представить себе сущность этой аксиомы непрерывности, зададимся вопросом, какова могла бы быть прерывность прямой (и вообще какой-нибудь линии). Прерывность эту можно представить себе двояко: или прямая прерывается на некотором (хотя бы очень малом) протяжении, например от A до B (черт. 90, *а*), или прямая прерывается в точке, например в месте C (черт. 90, *б*), т. е.

A B C
а) б)

Черт. 90

в этом месте у прямой отсутствует точка. В первом случае разделение на два класса, указанных в аксиоме, выполняется двумя точками: и точкой A, и точкой B; во втором случае совсем нет точки, выполняющей разделение. Значит, если прямая непрерывна, то разделение всех точек прямой на два класса, указанных в аксиоме, должно производиться точкой и только одной.

V. Аксиома параллельности

Через точку, данную вне прямой, можно провести только одну параллельную этой прямой.

88. Всякая система научно построенных аксиом должна удовлетворять трем требованиям: аксиомы должны быть совместны, независимы и достаточны. Первое требование состоит в том, чтобы среди аксиом не было противоречащих друг другу, т. е. чтобы, делая из этих аксиом всевозможные логически правильные выводы, мы никогда не могли бы прийти к противоречивым заключениям (Евклидовы аксиомы этому требованию удовлетворяют). Второе требование — независимость — состоит в том, чтобы в числе аксиом не было ни одной, которая зависела бы от других аксиом той же системы, иначе сказать, которая могла бы быть доказана при помощи других аксиом этой системы (этому требованию аксиомы Евклида не удовлетворяют; например, постулат 4-й, как мы уже говорили, может быть доказан). Наконец, третье требование — достаточность — состоит в том, чтобы при помощи этих аксиом, и только их одних, возможно было обосновать всю область геометрии (этому требованию аксиомы Евклида также не удовлетворяют; уже самому Евклиду приходилось часто прибегать к помощи интуиции).

Что изложенная выше система аксиом удовлетворяет указанным трем требованиям, было обстоятельно доказано как самим Гильбертом, так и некоторыми другими учеными.

89. Заметим, что при помощи указанной системы аксиом можно доказать все геометрические положения, даже и такие, которые обыкновенно принимаются за очевидные. Таковы, например, предложения:

1) «прямая, лежащая в плоскости треугольника и проходящая через точку, лежащую внутри его, пересекает контур треугольника в двух и только двух точках»; 2) «если прямая, лежащая в плоскости круга, проходит через точку, расположенную внутри этого круга, то она пересекается с окружностью в двух и только в двух точках»; 3) «повторяя слагаемым целое число раз меньший из двух данных отрезков, можно всегда получить новый отрезок, превосходящий больший из данных отрезков» (начало Архимеда, служащее основой измерения отрезков).

Конечно, в школьной геометрии нельзя провести такое строгое изложение, которое возможно в чистой научной геометрии. В школьных курсах приходится очень многие предложения (вроде только что указанных) принимать за интуитивные истины (без доказательства) и, в частности, допускать наложение фигур и вообще их перемещение, не перечисляя всех аксиом движения.

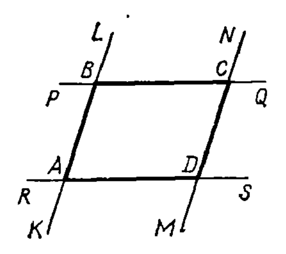
Замечание. О вопросах, изложенных в этой главе, помимо указанной в тексте работы проф. С. А. Богомолова, можно найти весьма ценные указания в книгах: Вебер и Вельштейн. Энциклопедия элементарной математики, т. II; Killing und Hovestadt. Handbuch des mathematischen Unterrichts, т. I; Enriques F. Fragen der Elementargeometrie, и др.

IX. ПАРАЛЛЕЛОГРАММЫ И ТРАПЕЦИИ

Общие свойства параллелограммов

90. Параллелограмм. Четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны, называется *параллелограммом*.

Такой четырехугольник ($ABCD$, черт. 91) получится, например, если какие-нибудь две параллельные прямые KL и MN пересечем двумя другими параллельными прямыми RS и PQ.

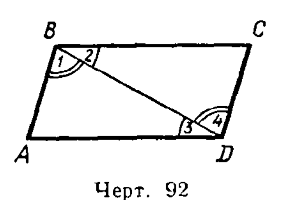


Черт. 91

91. Свойства сторон и углов параллелограмма.

Во всяком параллелограмме ($ABCD$, черт. 92) **противоположные стороны равны и противоположные углы равны.**

Проведя диагональ BD, мы получим два треугольника ABD и BCD, которые равны, потому что у них BD — общая сторона, $\angle 1=\angle 4$ и $\angle 2=\angle 3$ (как накрест лежащие при параллельных прямых). Из равенства треугольников следует: $AB=CD$, $AD=BC$ и $\angle A=\angle C$. Противоположные углы B и D также равны, так как они представляют собой суммы равных углов.

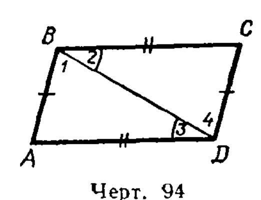


Черт. 92

З а м е ч а н и е. Равенство противоположных сторон параллелограмма иногда выражают другими словами так: **отрезки параллельных, заключенные между параллельными, равны.**

92. С л е д с т в и е. **Параллельные прямые** (AB и CD, черт. 93) **везде одинаково удалены одна от другой.**

Действительно, если из каких-нибудь двух точек M и N прямой CD опустим на AB перпендикуляры MP и NQ, то эти перпендикуляры параллельны (67) и потому фигура $MNQP$ — параллелограмм; отсюда следует, что $MP=NQ$, т. е. точки M и N одинаково удалены от прямой AB.



Черт. 94

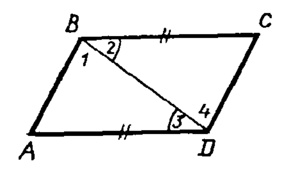
93. Два признака параллелограммов.

Если в четырехугольнике: 1) противоположные стороны равны или 2) две противоположные стороны равны и параллельны, то такой четырехугольник есть параллелограмм.

1. Пусть фигура $ABCD$ (черт. 94) есть четырехугольник, у которого

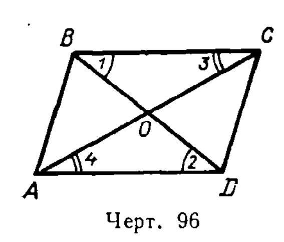
$$AB=CD \quad \text{и} \quad BC=AD.$$

Требуется доказать, что эта фигура — параллелограмм, т. е. $AB \| CD$ и $BC \| AD$.

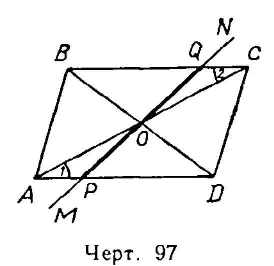


Черт. 95

Проведя диагональ BD, мы получим два треугольника, которые равны, так как у них BD — общая сторона, $AB=CD$ и $BC=AD$ (по условию). Из равенства их следует:



Черт. 96



Черт. 97

$\angle 1 = \angle 4$ и $\angle 2 = \angle 3$ (в равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы); вследствие этого $AB \| CD$ и $BC \| AD$ (если накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны).

2. Пусть в четырехугольнике ($ABCD$, черт. 95) дано условие $BC = AD$ и $BC \| AD$. Требуется доказать, что $ABCD$ есть параллелограмм, т. е. что $AB \| CD$.

Треугольники ABD и BCD равны, потому что у них BD — общая сторона, $BC = AD$ (по условию) и $\angle 2 = \angle 3$ (как накрест лежащие углы при параллельных). Из равенства треугольников следует: $\angle 1 = \angle 4$, поэтому $AB \| CD$.

94. Свойство диагоналей параллелограмма.

В параллелограмме ($ABCD$, черт. 96) **диагонали делятся пополам.**

Треугольники BOC и AOD равны, потому что у них $BC = AD$ (как противоположные стороны параллелограмма), $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$ (как накрест лежащие при параллельных). Из равенства треугольников следует: $OC = OA$ и $OB = OD$.

95. Центр симметрии.

Если через точку пересечения диагоналей параллелограмма (через точку O, черт. 97) **проведем какую-нибудь прямую** (MN), **то эта прямая пересечет контур параллелограмма в двух точках** (P и Q), **симметричных относительно точки пересечения диагоналей,** т. е. в двух таких точках, которые, во-первых, лежат по разные стороны от точки O и, во-вторых, на равных расстояниях от этой точки. Действительно, треугольники OAP и OCQ равны, так как у них $AO = OC$ (по свойству диагоналей параллелограмма), углы при общей вершине O равны (как вертикальные) и $\angle 1 = \angle 2$ (как углы внутренние накрест лежащие при параллельных). Из равенства этих треугольников следует: $OP = OQ$.

Если в какой-нибудь фигуре существует точка, обладающая указанным свойством, то такая точка называется *центром симметрии* этой фигуры; значит, **в параллелограмме пересечение его диагоналей есть центр симметрии.**

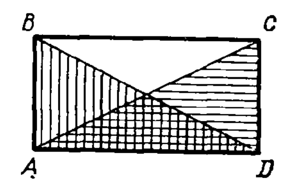
Если фигуру, имеющую центр симметрии, повернем вокруг этого центра на 180°, то фигура совместится с ее прежним положением, так как всякие две симметричные точки (например, P и Q, A и C и пр.) после такого вращения поменяются местами.

Симметрия относительно центра называется *центральной* симметрией в отличие от симметрии относительно оси, называемой *осевой* симметрией.

В каких параллелограммах есть и осевая симметрия, мы увидим в следующих параграфах.

Особые формы параллелограммов: прямоугольник, ромб и квадрат

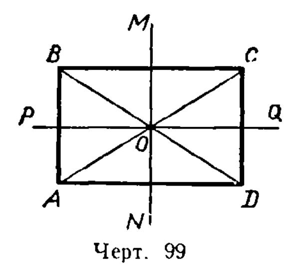
96. Прямоугольник и его свойства. Параллелограмм, у которого все углы прямые, называется *прямоугольником*.



Черт. 98

Так как прямоугольник есть параллелограмм, то он обладает всеми свойствами параллелограмма; например, диагонали его делятся пополам и точка их пересечения есть центр симметрии. Но у прямоугольника есть еще свои особые свойства, которые мы укажем в следующих двух теоремах:

1. **В прямоугольнике** ($ABCD$, черт. 98) **диагонали равны.**

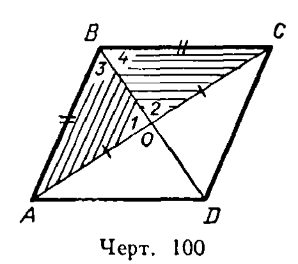


Черт. 99

Прямоугольные треугольники ACD и ABD равны, потому что у них AD — общий катет и $AB=CD$ (как противоположные стороны параллелограмма). Из равенства треугольников следует: $AC=BD$.

2. **Прямоугольник имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии,** в чем можно убедиться из рассмотрения чертежа 99.

97. Ромб и его свойства. Параллелограмм, у которого все стороны равны, называется *ромбом*. Конечно, ему принадлежат все свойства параллелограмма, но у него есть еще следующие два особых свойства:



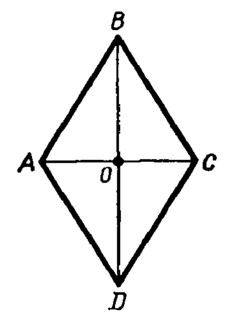
Черт. 100

1. **Диагонали ромба** ($ABCD$, черт. 100) **взаимно перпендикулярны и делят углы ромба пополам.**

Треугольники ABO и BOC равны, потому что у них BO — общая сторона, $AB=BC$ (так как у ромба все стороны равны) и $AO=OC$ (так как диагонали всякого параллелограмма делятся пополам). Из равенства треугольников следует:

$$\angle 1=\angle 2, \text{ т. е. } BD \perp AC \text{ и } \angle 3=\angle 4,$$

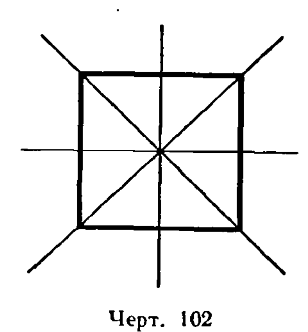
т. е. угол B делится диагональю пополам. Из равенства треугольников BOC и COD увидим, что $\angle C$ делится диагональю пополам и т. д.



Черт. 101

2. **Каждая диагональ ромба есть его ось симметрии.**

Диагональ BD (черт. 101) есть ось симметрии ромба $ABCD$, потому что, вращая $\triangle ABD$ вокруг BD, мы можем совместить его с $\triangle BCD$. То же самое можно сказать о диагонали AC.


Черт. 102

98. Квадрат и его свойства. Квадрат можно определить различно: или это параллелограмм, у которого все стороны равны и все углы прямые; или это прямоугольник, у которого все стороны равны; наконец, это ромб, у которого углы прямые.

Поэтому квадрату принадлежат все свойства параллелограмма, прямоугольника и ромба. Например, у квадрата имеются четыре оси симметрии (черт. 102): две, проходящие через середины противоположных сторон (как у прямоугольника), и две, проходящие через вершины противоположных углов (как у ромба).

Некоторые теоремы, основанные на свойствах параллелограмма

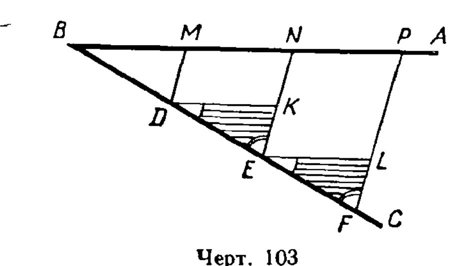
99. Теорема. **Если на одной стороне угла** (например, на стороне BC угла ABC, черт. 103) **отложим равные между собой отрезки** ($BD=DE=EF=...$) **и через их концы проведем параллельные прямые** (DM, EN, FP, ...) **до пересечения с другой стороной, то и на этой стороне отложатся равные между собой отрезки** ($BM=MN=$ $=NP=...$).

Проведем вспомогательные прямые DK и EL, параллельные AB. Полученные при этом треугольники DKE и ELF равны, так как у них $DE=EF$ (по условию), $\angle KDE=\angle LEF$ и $\angle KED=\angle LFE$ (как углы соответственные при параллельных прямых). Из равенства этих треугольников следует: $DK=EL$. Но $DK=MN$ и $EL=NP$ (как противоположные стороны параллелограммов); значит, $MN=NP$.

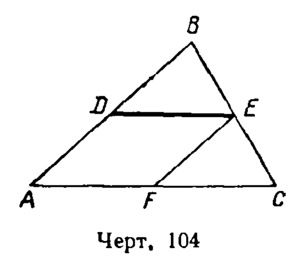
Также докажем равенство и других отрезков стороны AB (для отрезка BM мы должны взять $\triangle BMD$).

100. Следствие. **Прямая** (DE, черт. 104), **проведенная через середину стороны** (AB) **треугольника параллельно другой его стороне** (AC), **делит третью сторону** (BC) **пополам.**

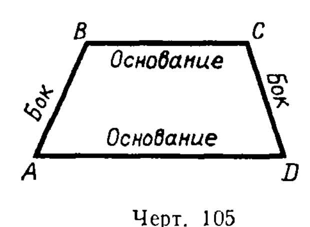
Действительно, обратив внимание на угол B, мы видим, что на его стороне отложены равные части $BD=DA$ и через точки деления D и A проведены параллельные прямые $DE \| AC$ до пересечения со стороной BC; значит, по доказанному, на этой стороне тоже отложатся равные части $BE=EC$ и потому BC разделится в точке E пополам.



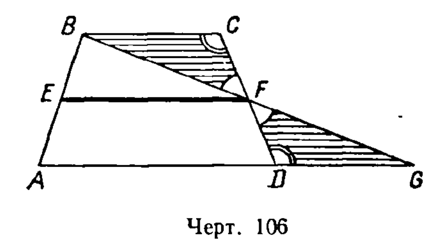
Черт. 103



Черт. 104



Черт. 105



Черт. 106

101. Теорема. **Прямая (DE, черт. 104), соединяющая середины двух сторон треугольника (ABC), параллельна третьей его стороне (AC) и равна ее половине.**

Вообразим, что через середину D стороны AB мы провели прямую, параллельную стороне AC. Тогда, по доказанному в предыдущем параграфе, эта прямая разделит сторону BC пополам и, следовательно, сольется с прямой DE, соединяющей середины сторон AB и BC.

Проведя еще $EF \parallel AD$, найдем, что сторона AC также разделится пополам в точке F; значит, $AF=FC$ и, кроме того, $AF=DE$ (как противоположные стороны параллелограмма $ADEF$); откуда следует: $DE=\frac{1}{2}AC$.

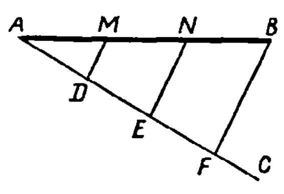
Замечание. Прямая, соединяющая середины двух сторон треугольника, называется его *средней линией.*

102. Трапеция и свойство ее средней линии. Четырехугольник, у которого две противоположные стороны параллельны, называется *трапецией*. Параллельные стороны трапеции называются ее *основаниями*, непараллельные — *боками* (черт. 105).

Прямая, соединяющая середины боков трапеции, называется ее *средней линией*. Линия эта обладает следующим свойством:

средняя линия (EF, черт. 106) трапеции параллельна основаниям и равна полусумме их.

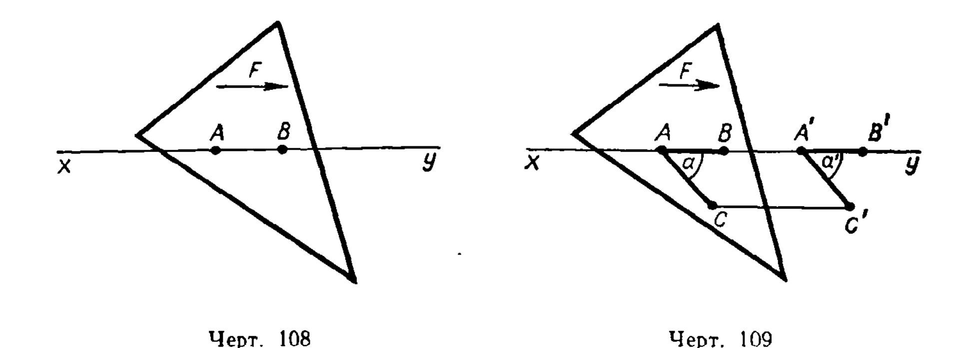
Через точки B и F проведем прямую до пересечения с продолжением стороны AD в некоторой точке G. Тогда получим два треугольника BCF и DFG, которые равны, так как у них $CF=FD$ (по условию), $\angle BFC=\angle DFG$ (как углы вертикальные) и $\angle BCF=\angle FDG$ (как углы накрест лежащие при параллельных). Из равенства треугольников следует: $BF=FG$ и $BC=DG$. Теперь видим, что в $\triangle ABG$ прямая EF соединяет середины двух сторон; значит (**101**), $EF \parallel AG$ и $EF=\frac{1}{2}(AD+$ $+DG)$; другими словами, $EF \parallel AD$ и $EF=\frac{1}{2}(AD+BC)$.



Черт. 107

103. Задача. Данный отрезок (AB, черт. 107) прямой разделить на данное число равных частей (например, на 3).

Из конца A проводим прямую AC, образующую с AB какой-нибудь угол; откладываем на AC от точки A три произвольной длины, но равных между собой отрезка: AD,



Черт. 108 Черт. 109

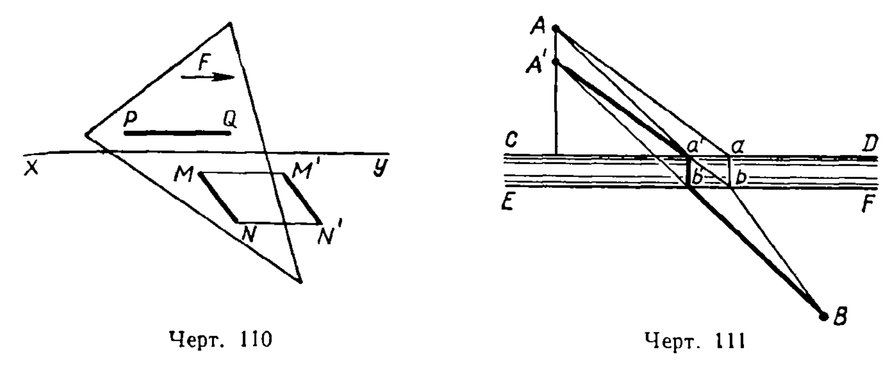
DE и EF; точку F соединяем с B; наконец, из E и D проводим прямые EN и DM, параллельные FB. Тогда отрезок AB, по доказанному (**99**), разделится в точках M и N на три равные части.

104. Параллельное перенесение. Пусть дана какая-нибудь фигура F (например треугольник, черт. 108) и на ней взяты две произвольные точки A и B. Вообразим, что эта фигура движется (например, в сторону, указанную стрелкой) по той плоскости, на которой она расположена, таким образом, что ее точки A и B (следовательно, и весь отрезок AB) скользят по неподвижной прямой xy, проходящей через эти точки, причем не изменяется ни форма фигуры F, ни величина ее. Пример такого движения мы видели, когда для проведения перпендикулярной или параллельной прямой (**24**, **70**) мы заставляли чертежный треугольник скользить одним своим катетом по краю линейки, удерживаемой неподвижно.

Разъясним теперь, что при таком движении фигуры F все ее точки двигаются в одном и том же направлении по прямым, параллельным той неподвижной прямой, по которой производится скольжение, и при этом проходят пути одинаковой длины. Возьмем, например (черт. 109), какую-нибудь точку C и соединим ее прямой с точкой A. Пусть отрезок AB переместится (скольжением вдоль xy) в положение $A'B'$. Тогда отрезок CA переместится в некоторое положение $C'A'$, причем не изменится ни длина этого отрезка, ни величина угла α, образуемого им с AB. Значит, в четырехугольнике $AA'C'C$ две противоположные стороны $A'C'$ и AC будут равны и параллельны, поэтому четырехугольник этот окажется параллелограммом (**93**) и, значит, $CC'=AA'$ и $CC' \parallel AA'$. Таким образом, всякая точка C фигуры F перемещается по прямой, параллельной линии скольжения, и проходит путь, равный пути AA'.

Такое движение фигуры F, при котором все ее точки перемещаются по прямым, параллельным некоторой неподвижной прямой (по которой производится скольжение), называется *параллельным перенесением*.

При параллельном перенесении фигуры F всякая ее прямая MN (черт. 110) переносится параллельно самой себе. Действительно, если MN перенесется в положение $M'N'$, то четырехугольник $MM'N'N$



Черт. 110

Черт. 111

должен быть параллелограммом, так как пути MM' и NN' параллельны и равны; следовательно, $MN \| M'N'$. Конечно, если прямая (например, PQ) параллельна линии скольжения, то она при движении скользит вдоль самой себя.

Параллельным перенесением приходится иногда пользоваться при решении геометрических задач на построение. Как пример приведем следующую задачу.

105. З а д а ч а. Два города A и B (черт. 111) расположены по разные стороны от канала, берега которого CD и EF прямолинейны и параллельны. В каком месте канала надо построить мост ab, чтобы путь $AabB$ оказался самым коротким?

Для облегчения решения вообразим, что весь берег, на котором расположен город A, перемещен параллельным перенесением по направлению, перпендикулярному берегам, на столько, чтобы берег CD слился с берегом EF. Тогда точка A переместится в точку A', расположенную на перпендикуляре к берегу на расстоянии AA', равном длине моста. Ясно, что при новом положении городов кратчайший путь между ними будет прямая $A'B$. Если мы теперь переместим берег с городом A обратно, то A' снова займет положение A, а точка b', в которой прямая $A'B$ пересекается с EF, перейдет в a'. Если мы построим мост $a'b'$, то путь от A до B будет $Aa'b'B$. Этот путь будет короче всякого другого пути, например короче пути $AabB$, так как сумма $Aa'+b'B$ равна прямой $A'B$, тогда как сумма $Aa+bB$ равна ломаной $A'bB$, которая длиннее прямой $A'B$.

УПРАЖНЕНИЯ

Доказать теоремы

48. Соединив последовательно середины сторон какого-нибудь четырехугольника, получим параллелограмм.

49. В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине. (У к а з а н и е. Следует продолжить медиану на равное расстояние.)

50. Обратно, если медиана равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.

51. В прямоугольном треугольнике медиана и высота, проведенные к гипотенузе, образуют угол, равный разности острых углов треугольника.

52. Если в прямоугольном треугольнике один острый угол равен $^1/_3 d$ (т. е. 30°), то противолежащий ему катет составляет половину гипотенузы.

53. Обратно, если катет вдвое меньше гипотенузы, то противолежащий ему острый угол равен $^1/_3 d$.

54. В $\triangle ABC$ биссектриса угла A встречает сторону BC в точке D; прямая, проведенная из D параллельно CA, встречает AB в точке E; прямая, проведенная из E параллельно BC, встречает AC в F. Доказать, что $EA=FC$.

55. Внутри данного угла построен другой угол, стороны которого параллельны сторонам данного и равно отстоят от них. Доказать, что биссектриса внутреннего угла лежит на биссектрисе внешнего.

56. Всякая прямая, проведенная внутри трапеции между ее основаниями, делится средней линией пополам.

57. В треугольнике через точку пересечения биссектрис углов, прилежащих к основанию, проведена прямая параллельно основанию. Доказать, что эта прямая равна сумме отрезков боковых сторон, считая их от основания.

58. Через вершины углов треугольника проведены прямые, параллельные противоположным сторонам. Образованный ими треугольник в 4 раза более данного; каждая сторона его в 2 раза более соответствующей стороны данного треугольника.

59. В равнобедренном треугольнике сумма расстояний каждой точки основания от боковых сторон есть величина постоянная, а именно, она равна высоте, опущенной на боковую сторону.

60. Как изменится эта теорема, если взять точку на продолжении основан

61. В равностороннем треугольнике сумма расстояний всякой точки, взя внутри этого треугольника, до сторон его есть величина постоянная, равная вы треугольника.

62. Всякий четырехугольник, диагонали которого делятся пополам, есть параллелограмм.

63. Всякий параллелограмм, у которого диагонали равны, есть прямоугольник.

64. Всякий параллелограмм, у которого диагонали взаимно перпендикулярны, есть ромб.

65. Всякий параллелограмм, у которого диагональ делит угол пополам, есть ромб.

66. Из точки пересечения диагоналей ромба опущены перпендикуляры на стороны ромба. Доказать, что основания этих перпендикуляров суть вершины прямоугольника.

67. Биссектрисы углов прямоугольника своим пересечением образуют квадрат.

68. Пусть A', B', C' и D' будут середины сторон CD, DA, AB и BC квадрата. Доказать, что прямые AA', CC', DD' и BB' образуют своим пересечением квадрат, сторона которого равна $^2/_5$ каждой из этих прямых.

69. Дан квадрат $ABCD$. На сторонах его отложены р а в н ы е части: AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 соединены последовательно прямыми. Доказать, что $A_1B_1C_1D_1$ есть квадрат.

70. Если середины сторон какого угодно четырехугольника взять за вершины нового четырехугольника, то (упр. 48) последний есть параллелограмм. Определить, при каких условиях этот параллелограмм будет: 1) прямоугольником, 2) ромбом, 3) квадратом (решается на основании § 101).

Найти геометрические места

71. Середин всех прямых, проведенных из данной точки к различным точкам данной прямой.

72. Точек, равноотстоящих от двух параллельных прямых.

73. Вершин треугольников, имеющих общее основание и равные высоты.

Задачи на построение

74. Даны два угла треугольника, построить третий.

75. Дан острый угол прямоугольного треугольника; построить другой острый угол.

76. Провести прямую, параллельную данной прямой и находящуюся от нее на данном расстоянии.

77. Разделить пополам угол, вершина которого не помещается на чертеже (см. упр. 55).

78. Через данную точку провести прямую под данным углом к данной прямой.

79. Даны две прямые XY и $X'Y'$ и точка P; провести через эту точку такую секущую, чтобы часть ее, заключенная между данными прямыми, делилась точкой P пополам.

80. Та же самая задача с заменой прямой XY окружностью с центром O.

81. Через данную точку провести прямую так, чтобы отрезок ее, заключенный между двумя данными параллельными прямыми, равнялся данной длине.

82. Между сторонами данного острого угла поместить прямую данной длины так, чтобы она была перпендикулярна к одной стороне угла.

83. Между сторонами данного угла поместить прямую данной длины так, чтобы она отсекала от сторон угла равные части.

84. Построить прямоугольный треугольник по данным острому углу и противолежащему катету.

85. Построить треугольник по двум углам и стороне, лежащей против каждого из них.

86. Построить равнобедренный треугольник по углу при вершине и основанию.

87. То же — по углу при основании и высоте, опущенной на боковую сторону.

88. То же — по боковой стороне и высоте, опущенной на нее.

89. Построить равносторонний треугольник по его высоте.

90. Разделить прямой угол на три равные части (другими словами, построить угол, равный $^1/_3\ d=30°$).

91. Построить треугольник по основанию, высоте и боковой стороне.

92. То же — по основанию, высоте и углу при основании.

93. То же — по углу и двум высотам, опущенным на стороны этого угла.

94. То же — по стороне, сумме двух других сторон и высоте, опущенной на одну из этих сторон.

95. То же — по двум углам и периметру.

96. То же — по высоте, периметру и углу при основании.

97. Провести в треугольнике прямую, параллельную основанию, так, чтобы она была равна сумме отрезков боковых сторон, считая от основания.

98. Провести в треугольнике прямую, параллельную основанию, так, чтобы верхний отрезок одной боковой стороны равнялся нижнему отрезку другой боковой стороны.

99. Построить многоугольник, равный данному. (Указание. Диагоналями разбивают данный многоугольник на треугольники.)

100. Построить четырехугольник по трем его углам и двум сторонам, образующим четвертый угол. (Указание. Надо найти четвертый угол.)

101. То же — по трем сторонам и двум диагоналям.

102. Построить параллелограмм по двум неравным сторонам и одной диагонали.

103. То же — по стороне и двум диагоналям.

104. То же — по двум диагоналям и углу между ними.

105. То же — по основанию, высоте и диагонали.

106. Построить прямоугольник по диагонали и углу между диагоналями.

107. Построить ромб по стороне и диагонали.

108. То же — по двум диагоналям.

109. То же — по высоте и диагонали.

110. То же — по углу и диагонали, проходящей через этот угол.

111. То же — по диагонали и противолежащему углу.

112. То же — по сумме диагоналей и углу, образованному диагональю со стороной.

113. Построить квадрат по данной диагонали.

114. Построить трапецию по основанию, прилежащему к нему углу и двум непараллельным сторонам (могут быть два решения, одно и ни одного).

115. То же — по разности оснований, двум боковым сторонам и одной диагонали.

116. То же — по четырем сторонам. (Всегда ли задача возможна?)

117. То же — по основанию, высоте и двум диагоналям (условие возможности).

118. То же — по двум основаниям и двум диагоналям (условие возможности).

119. Построить квадрат по сумме стороны с диагональю.

120. То же — по разности диагонали и стороны.

121. Построить параллелограмм по двум диагоналям и высоте.

122. То же — по стороне, сумме диагоналей и углу между ними.

123. Построить треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне.

124. То же — по основанию, высоте и медиане, проведенной к боковой стороне.

125. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и сумме катетов (исследовать).

126. То же — по гипотенузе и разности катетов.

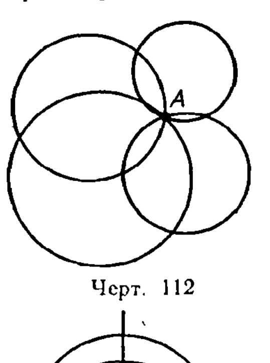
127. Даны две точки A и B, расположенные по одну сторону от данной прямой XY. Расположить на этой прямой отрезок MN данной длины l так, чтобы ломаная $AM+MN+NB$ была наименьшей длины.

ОТДЕЛ ВТОРОЙ

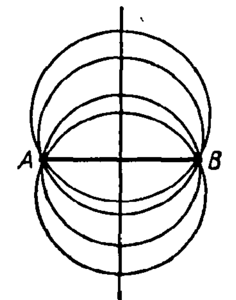
ОКРУЖНОСТЬ

I. ФОРМА И ПОЛОЖЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ

106. Предварительное замечание. Очевидно, что через одну точку (A, черт. 112) можно провести сколько угодно окружностей; центры их можно брать произвольно. Через две точки (A и B, черт. 113) тоже можно провести сколько угодно окружностей, но центры их нельзя брать произвольно, так как точки, одинаково удаленные от двух точек A и B, должны лежать на перпендикуляре, проведенном к отрезку AB через его середину (53).



Черт. 112

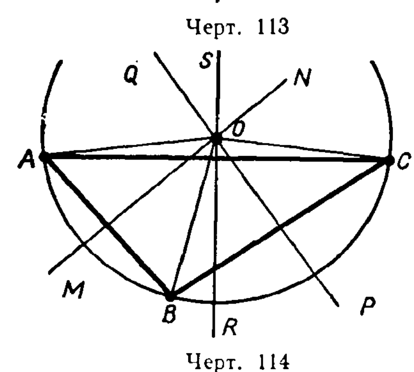


Черт. 113

Посмотрим теперь, можно ли провести окружность через три точки.

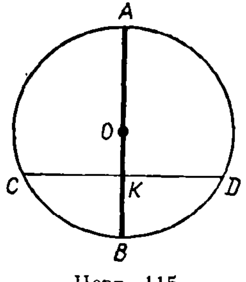
107. Теорема. **Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность и притом только одну.**

Через три точки A, B и C (черт. 114), не лежащие на одной прямой (другими словами, через вершины $\triangle ABC$), только тогда можно провести окружность, если существует такая четвертая точка O, которая одинаково удалена от точек A, B и C. Докажем, что такая точка существует и притом только одна. Для этого примем во внимание, что всякая точка, одинаково удаленная от точек A и B, должна лежать на перпендикуляре MN, проведенном к стороне AB через ее середину (53); точно так же всякая точка, одинаково удаленная от точек B и C, должна лежать на перпендикуляре PQ, проведенном к стороне BC через ее середину. Значит, если существует точка, одинаково удаленная от трех точек A, B и C, то она должна лежать и на MN, и на PQ, что возможно только тогда, когда она совпадает с точкой пересечения этих двух



Черт. 114

прямых. Прямые MN и PQ всегда пересекаются (75), так как они перпендикулярны к пересекающимся прямым AB и BC. Точка O их пересечения и будет точкой, одинаково удаленной от A, от B и от C; значит, если примем эту точку за центр, а за радиус возьмем расстояние OA (или OB, или OC), то окружность пройдет через точки A, B и C. Так как прямые MN и PQ могут пересечься только в одной точке, то центр окружности может быть только один и длина его радиуса может быть только одна; значит, искомая окружность единственная.



Черт. 115

Следствие. Точка O (черт. 114), находясь на одинаковом расстоянии от A и от C, должна также лежать на перпендикуляре RS, проведенном к стороне AC через ее середину. Таким образом,

три перпендикуляра к сторонам треугольника, проведенные через их середины, пересекаются в одной точке.

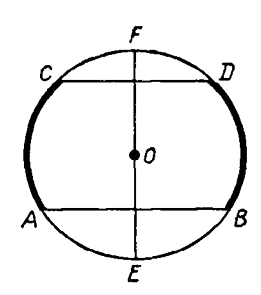
108. Теорема. **Диаметр** (AB, черт. 115), **перпендикулярный к хорде** (CD), **делит эту хорду и обе стягиваемые ею дуги пополам.**

Перегнем чертеж по диаметру AB так, чтобы его левая часть упала на правую. Тогда левая полуокружность совместится с правой полуокружностью и перпендикуляр KC пойдет по KD. Из этого следует, что точка C, представляющая собой пересечение полуокружности с KC, упадет на D; поэтому

$$CK=KD;\quad \smile BC=\smile BD;\quad \smile AC=\smile AD.$$

Следствия. 1. **Диаметр** (AB, черт. 115), **проведенный через середину хорды** (CD), **перпендикулярен к этой хорде и делит дугу, стягиваемую ею, пополам.**

2. **Диаметр** (AB, тот же черт.), **проведенный через середину дуги** (CBD), **перпендикулярен к хорде, стягивающей эту дугу, и делит ее пополам.**

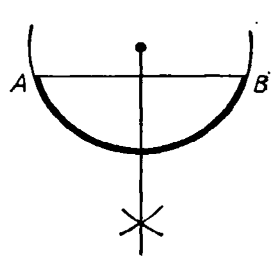


Черт. 116

Оба эти предложения (обратные изложенной теореме) легко доказываются от противного.

109. Теорема. **Дуги** (AC и BD, черт. 116), **заключенные между параллельными хордами** (AB и CD), **равны.** Перегнем чертеж по диаметру $EF \perp AB$. Тогда на основании предыдущей теоремы можно утверждать, что точка A упадет в B, точка C упадет в D и, следовательно, дуга AC совместится с дугой BD, т. е. эти дуги равны.

110. Задачи. 1. Разделить данную дугу (AB, черт. 117) пополам. Соединив концы дуги хордой AB, опускаем



Черт. 117

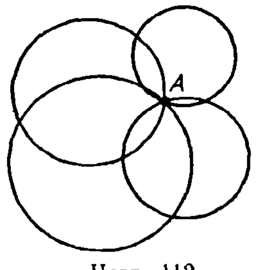
127. Даны две точки A и B, расположенные по одну сторону от данной прямой XY. Расположить на этой прямой отрезок MN данной длины l так, чтобы ломаная $AM+MN+NB$ была наименьшей длины.

ОТДЕЛ ВТОРОЙ

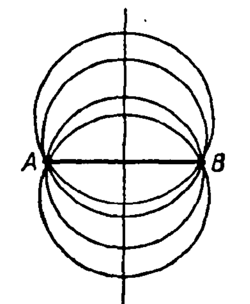
ОКРУЖНОСТЬ

I. ФОРМА И ПОЛОЖЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ

106. Предварительное замечание. Очевидно, что через одну точку (A, черт. 112) можно провести сколько угодно окружностей; центры их можно брать произвольно. Через две точки (A и B, черт. 113) тоже можно провести сколько угодно окружностей, но центры их нельзя брать произвольно, так как точки, одинаково удаленные от двух точек A и B, должны лежать на перпендикуляре, проведенном к отрезку AB через его середину (53).



Черт. 112

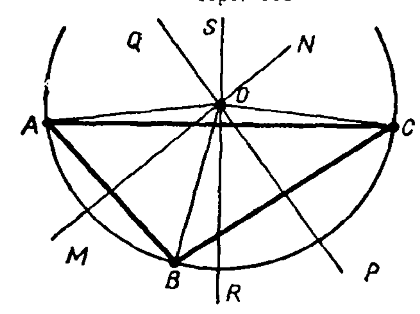


Черт. 113

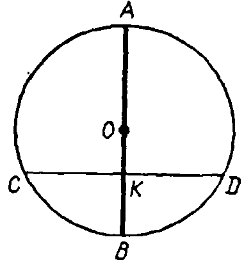
Посмотрим теперь, можно ли провести окружность через три точки.

107. Т е о р е м а. **Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность и притом только одну.**

Через три точки A, B и C (черт. 114), не лежащие на одной прямой (другими словами, через вершины $\triangle ABC$), только тогда можно провести окружность, если существует такая четвертая точка O, которая одинаково удалена от точек A, B и C. Докажем, что такая точка существует и притом только одна. Для этого примем во внимание, что всякая точка, одинаково удаленная от точек A и B, должна лежать на перпендикуляре MN, проведенном к стороне AB через ее середину (53); точно так же всякая точка, одинаково удаленная от точек B и C, должна лежать на перпендикуляре PQ, проведенном к стороне BC через ее середину. Значит, если существует точка, одинаково удаленная от трех точек A, B и C, то она должна лежать и на MN, и на PQ, что возможно только тогда, когда она совпадает с точкой пересечения этих двух



Черт. 114



Черт. 115

прямых. Прямые MN и PQ всегда пересекаются (75), так как они перпендикулярны к пересекающимся прямым AB и BC. Точка O их пересечения и будет точкой, одинаково удаленной от A, от B и от C; значит, если примем эту точку за центр, а за радиус возьмем расстояние OA (или OB, или OC), то окружность пройдет через точки A, B и C. Так как прямые MN и PQ могут пересечься только в одной точке, то центр окружности может быть только один и длина его радиуса может быть только одна; значит, искомая окружность единственная.

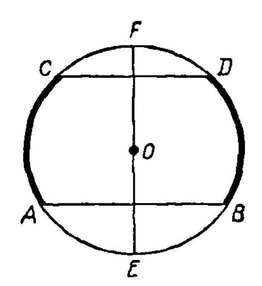
Следствие. Точка O (черт. 114), находясь на одинаковом расстоянии от A и от C, должна также лежать на перпендикуляре RS, проведенном к стороне AC через ее середину. Таким образом,

три перпендикуляра к сторонам треугольника, проведенные через их середины, пересекаются в одной точке.

108. Теорема. **Диаметр** (AB, черт. 115), **перпендикулярный к хорде** (CD), **делит эту хорду и обе стягиваемые ею дуги пополам.**

Перегнем чертеж по диаметру AB так, чтобы его левая часть упала на правую. Тогда левая полуокружность совместится с правой полуокружностью и перпендикуляр KC пойдет по KD. Из этого следует, что точка C, представляющая собой пересечение полуокружности с KC, упадет на D; поэтому

$$CK=KD; \quad \smile BC=\smile BD; \quad \smile AC=\smile AD.$$



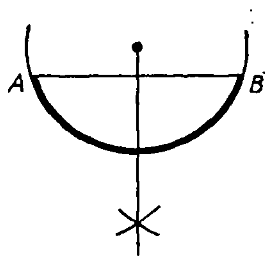
Черт. 116

Следствия. 1. **Диаметр** (AB, черт. 115), **проведенный через середину хорды** (CD), **перпендикулярен к этой хорде и делит дугу, стягиваемую ею, пополам.**

2. **Диаметр** (AB, тот же черт.), **проведенный через середину дуги** (CBD), **перпендикулярен к хорде, стягивающей эту дугу, и делит ее пополам.**

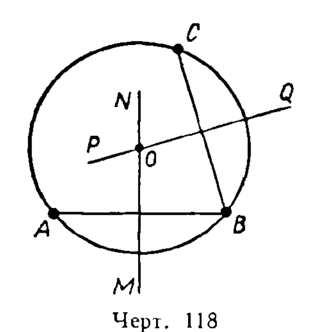
Оба эти предложения (обратные изложенной теореме) легко доказываются от противного.

109. Теорема. **Дуги** (AC и BD, черт. 116), **заключенные между параллельными хордами** (AB и CD), **равны.** Перегнем чертеж по диаметру $EF \perp AB$. Тогда на основании предыдущей теоремы можно утверждать, что точка A упадет в B, точка C упадет в D и, следовательно, дуга AC совместится с дугой BD, т. е. эти дуги равны.



Черт. 117

110. Задачи. 1. Разделить данную дугу (AB, черт. 117) пополам. Соединив концы дуги хордой AB, опускаем



Черт. 118

на нее перпендикуляр из центра и продолжаем его до пересечения с дугой. По доказанному в предыдущей теореме дуга AB разделится этим перпендикуляром пополам. Если же центр неизвестен, тогда к хорде AB следует провести перпендикуляр через ее середину.

2. Найти центр данной окружности (черт. 118). Взяв на данной окружности какие-нибудь точки A, B и C, проводят через них две хорды, например AB и CB, и через середины этих хорд проводят к ним перпендикуляры MN и PQ. Искомый центр, будучи одинаково удален от A, B и C, должен лежать и на MN, и на PQ (53); следовательно, он находится в пересечении этих перпендикуляров, т. е. в точке O.

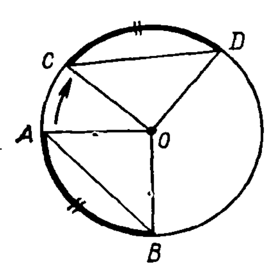
II. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ ДУГАМИ, ХОРДАМИ И РАССТОЯНИЯМИ ХОРД ОТ ЦЕНТРА

111. Теоремы. **В одном круге (или в равных кругах):**

1) если дуги равны, то стягивающие их хорды равны; обратно,

2) если хорды равны, то стягиваемые ими дуги равны.

1) Пусть дуга AB (черт. 119) равна дуге CD; требуется доказать, что хорды AB и CD равны. Проведя радиусы OA, OB, OC и OD, мы получим два треугольника, у которых две стороны одного равны двум сторонам другого и углы между ними равны (равным дугам соответствуют равные углы). Следовательно, эти треугольники равны и потому $AB=CD$.



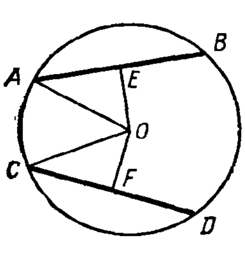
Черт. 119

2) Если хорды AB и CD равны, то $\triangle AOB$ и $\triangle COD$, имея три соответственно равные стороны, равны, а потому $\angle AOB = \angle COD$. Если же центральные углы равны, то и соответствующие им дуги равны.

112. Теоремы. **В одном круге (или в равных кругах):**

1) если хорды (AB и CO, черт. 120) **равны, то они одинаково удалены от центра;** обратно,

2) если хорды одинаково удалены от центра, то они равны.



Черт. 120

1) Перпендикуляры OE и OF делят хорды пополам; поэтому если $AB=CD$, то и $AE=CF$. Тогда $\triangle OAE$ и $\triangle OCF$, имея равные катеты AE и CF и равные гипотенузы (как радиусы), равны, а потому и $OE=OF$.

2) $\triangle OAE$ и $\triangle OCF$, имея равные катеты OE и OF (по условию) и равные гипотенузы, равны; поэтому $AE=CF$, и следовательно, $AB=CD$.

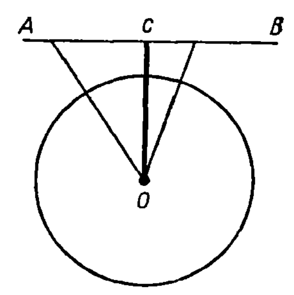
III. ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ОКРУЖНОСТИ

113. Прямая и окружность могут, очевидно, находиться только в следующих трех относительных положениях:

1. **Расстояние** (*OC*) **центра от прямой** (*AB*) **больше радиуса окружности** (черт. 121). Тогда точка *C* прямой удалена от центра больше чем на радиус и потому лежит вне круга. Так как все остальные точки прямой удалены от *O* еще более, чем точка *C* (наклонные длиннее перпендикуляров), то они все лежат вне круга; значит, тогда прямая не имеет никаких точек, общих с окружностью.

2. **Расстояние** (*OC*) **центра от прямой меньше радиуса.** В этом случае (черт. 122) точка *C* лежит внутри круга, и тогда, очевидно, прямая с окружностью пересекается.

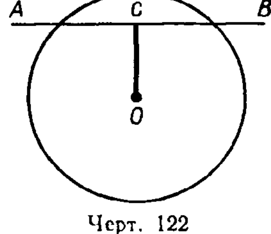
3. **Расстояние** (*OC*) **центра от прямой равно радиусу.** Тогда точка *C* (черт. 123) принадлежит и прямой, и окружности, все же остальные точки прямой, будучи удалены от *O* более, чем точка *C*, лежат вне круга. Значит, в этом случае прямая и окружность имеют только одну общую точку, именно ту, которая служит основанием перпендикуляра, опущенного из центра на прямую.



Черт. 121

Такая прямая (*AB*, черт. 123), которая с окружностью имеет только одну общую точку, называется *касательной* к окружности; общая точка (*C*) называется тогда *точкой касания*.

114. Мы видим таким образом, что из трех возможных случаев расположения прямой относительно окружности касание имеет место только в одном третьем случае, т. е. тогда, когда расстояние прямой от центра равно радиусу, и тогда точкой касания служит конец радиуса, перпендикулярного к прямой. Это можно высказать другими словами так:

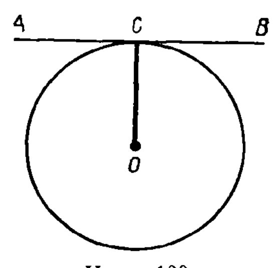


Черт. 122

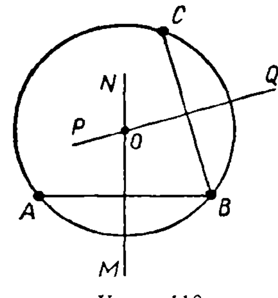
1. **Если прямая** (*AB*, черт. 123) **перпендикулярна к радиусу** (*OC*) **в конце его, лежащем на окружности, то она касается окружности,** и обратно:

2. **Если прямая касается окружности, то радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен к ней.**

115. З а д а ч а. Ч е р е з д а н н у ю т о ч к у п р о в е с т и к а с а т е л ь н у ю к д а н н о й о к р у ж н о с т и. Если данная точка (например, точка *C*, черт. 123) находится н а о к р у ж н о с т и, то проводят через нее радиус и через конец радиуса перпендикулярную прямую. Эта прямая и будет искомой касательной. Другой касатель-



Черт. 123



Черт. 118

на нее перпендикуляр из центра и продолжаем его до пересечения с дугой. По доказанному в предыдущей теореме дуга AB разделится этим перпендикуляром пополам. Если же центр неизвестен, тогда к хорде AB следует провести перпендикуляр через ее середину.

2. Найти центр данной окружности (черт. 118). Взяв на данной окружности какие-нибудь точки A, B и C, проводят через них две хорды, например AB и CB, и через середины этих хорд проводят к ним перпендикуляры MN и PQ. Искомый центр, будучи одинаково удален от A, B и C, должен лежать и на MN, и на PQ (53); следовательно, он находится в пересечении этих перпендикуляров, т. е. в точке O.

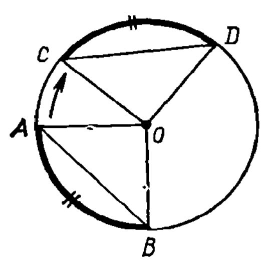
II. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ ДУГАМИ, ХОРДАМИ И РАССТОЯНИЯМИ ХОРД ОТ ЦЕНТРА

111. Теоремы. **В одном круге (или в равных кругах):**

1) **если дуги равны, то стягивающие их хорды равны;** обратно,

2) **если хорды равны, то стягиваемые ими дуги равны.**

1) Пусть дуга AB (черт. 119) равна дуге CD; требуется доказать, что хорды AB и CD равны. Проведя радиусы OA, OB, OC и OD, мы получим два треугольника, у которых две стороны одного равны двум сторонам другого и углы между ними равны (равным дугам соответствуют равные углы). Следовательно, эти треугольники равны и потому $AB=CD$.



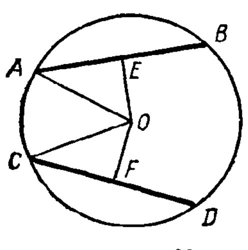
Черт. 119

2) Если хорды AB и CD равны, то $\triangle AOB$ и $\triangle COD$, имея три соответственно равные стороны, равны, а потому $\angle AOB = \angle COD$. Если же центральные углы равны, то и соответствующие им дуги равны.

112. Теоремы. **В одном круге (или в равных кругах):**

1) **если хорды** (AB и CO, черт. 120) **равны, то они одинаково удалены от центра;** обратно,

2) **если хорды одинаково удалены от центра, то они равны.**



Черт. 120

1) Перпендикуляры OE и OF делят хорды пополам; поэтому если $AB=CD$, то и $AE=CF$. Тогда $\triangle OAE$ и $\triangle OCF$, имея равные катеты AE и CF и равные гипотенузы (как радиусы), равны, а потому и $OE=OF$.

2) $\triangle OAE$ и $\triangle OCF$, имея равные катеты OE и OF (по условию) и равные гипотенузы, равны; поэтому $AE=CF$, и следовательно, $AB=CD$.

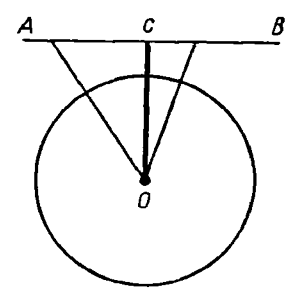
III. ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ОКРУЖНОСТИ

113. Прямая и окружность могут, очевидно, находиться только в следующих трех относительных положениях:

1. **Расстояние (*OC*) центра от прямой (*AB*) больше радиуса окружности** (черт. 121). Тогда точка *C* прямой удалена от центра больше чем на радиус и потому лежит вне круга. Так как все остальные точки прямой удалены от *O* еще более, чем точка *C* (наклонные длиннее перпендикуляров), то они все лежат вне круга; значит, тогда прямая не имеет никаких точек, общих с окружностью.

2. **Расстояние (*OC*) центра от прямой меньше радиуса.** В этом случае (черт. 122) точка *C* лежит внутри круга, и тогда, очевидно, прямая с окружностью пересекается.

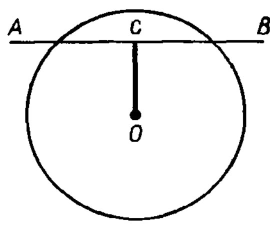
3. **Расстояние (*OC*) центра от прямой равно радиусу.** Тогда точка *C* (черт. 123) принадлежит и прямой, и окружности, все же остальные точки прямой, будучи удалены от *O* более, чем точка *C*, лежат вне круга. Значит, в этом случае прямая и окружность имеют только одну общую точку, именно ту, которая служит основанием перпендикуляра, опущенного из центра на прямую.



Черт. 121

Такая прямая (*AB*, черт. 123), которая с окружностью имеет только одну общую точку, называется *касательной* к окружности; общая точка (*C*) называется тогда *точкой касания*.

114. Мы видим таким образом, что из трех возможных случаев расположения прямой относительно окружности касание имеет место только в одном третьем случае, т. е. тогда, когда расстояние прямой от центра равно радиусу, и тогда точкой касания служит конец радиуса, перпендикулярного к прямой. Это можно высказать другими словами так:

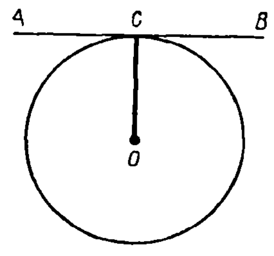


Черт. 122

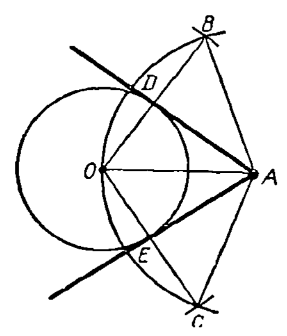
1. **Если прямая (*AB*, черт. 123) перпендикулярна к радиусу (*OC*) в конце его, лежащем на окружности, то она касается окружности,** и обратно:

2. **Если прямая касается окружности, то радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен к ней.**

115. З а д а ч а. Ч е р е з д а н н у ю т о ч к у п р о в е с т и к а с а т е л ь н у ю к д а н н о й о к р у ж н о с т и. Если данная точка (например, точка *C*, черт. 123) находится н а о к р у ж н о с т и, то проводят через нее радиус и через конец радиуса перпендикулярную прямую. Эта прямая и будет искомой касательной. Другой касатель-



Черт. 123



Черт. 124

ной через ту же точку окружности провести нельзя, так как касательная должна быть перпендикулярна к радиусу в конце его, лежащем на окружности, а двух различных перпендикуляров к одному и тому же радиусу через одну и ту же точку провести нельзя.

Рассмотрим теперь случай, когда точка дана в н е к р у г а.

Пусть требуется (черт. 124) провести к окружности центра O касательную через точку A. Для этого из точки A как из центра описываем дугу радиуса AO, а из точки O как из центра пересекаем эту дугу в точках B и C растворением циркуля, равным диаметру данного круга. Проведя затем хорды OB и OC, соединим точку A с точками D и E, в которых эти хорды пересекаются с данной окружностью. Прямые AD и AE и будут касательными к окружности O. Действительно, из построения видно, что $\triangle AOB$ и $\triangle AOC$ равнобедренные ($AO=AB=$ $=AC$) с основаниями OB и OC, равными диаметру круга O. Так как OD и OE — радиусы, а радиус равен половине диаметра, то D есть середина OB, а E — середина OC; значит, прямые AD и AE суть м е д и а н ы, проведенные к основаниям равнобедренных треугольников и потому перпендикулярны к этим основаниям (35). Если же прямые AD и AE перпендикулярны к радиусам OD и OE в их концах, лежащих на окружности, то они касательные.

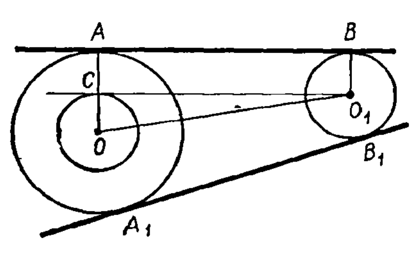
З а м е ч а н и е. Ниже (§ 131) будет указан другой прием проведения касательной.

116. С л е д с т в и е. **Две касательные, проведенные из одной точки к окружности, равны и образуют равные углы с прямой, соединяющей эту точку с центром.**

Так, $AD=AE$ и $\angle OAD=\angle OAE$ (черт. 124), потому что прямоугольные треугольники AOD и AOE, имеющие общую гипотенузу AO и равные катеты OD и OE (как радиусы), равны.

117. З а д а ч а. К д в у м о к р у ж н о с т я м п р о в е с т и о б щ у ю к а с а т е л ь н у ю (черт. 125).

1. А н а л и з. Предположим, что задача решена. Пусть AB будет общая касательная, A и B — точки касания. Проведем радиусы OA и O_1B. Эти радиусы, будучи перпендикулярны к общей касательной, параллельны между собой. Вообразим, что касательная AB перемещена параллельным перенесением так, чтобы точка B, скользя по радиусу BO_1, перешла в O_1. Тогда касательная займет такое положение CO_1, при котором $CA=O_1B$ и $OC \perp CO_1$. Вследствие этого, если опишем из O как



Черт. 125

из центра радиусом OC окружность, то она будет касаться прямой O_1C в точке C. Радиус этой вспомогательной окружности известен: он равен $OA-CA=OA-O_1B$, т. е. он равен разности радиусов данных окружностей.

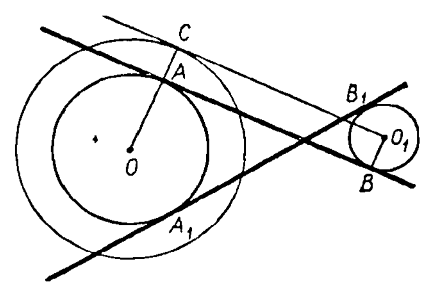
П о с т р о е н и е. Обозначим радиус большего круга буквой R и радиус меньшего буквой r. Опишем из центра O окружность радиусом, равным $R-r$, и из O_1 проводим к этой окружности касательную O_1C (способом, указанным в задаче § 115); через точку касания C проводим радиус OC и продолжаем его до встречи с данной окружностью в точке A. Наконец, из A проводим AB параллельно CO_1.

Д о к а з а т е л ь с т в о (синтез). Так как O_1C по построению есть касательная в точке C к окружности радиуса OC, то $O_1C \perp OA$. Так как $AB \| CO_1$, то и $AB \perp OA$ и потому AB есть касательная к окружности центра O (114). Остается доказать, что прямая AB касается также и другой данной окружности. Для этого из центра O_1 проведем $O_1B \perp AB$. Прямые O_1B и CA, будучи перпендикулярны к AB, должны быть параллельны; с другой стороны, $AB \| O_1C$, следовательно, фигура O_1CAB есть параллелограмм; поэтому $O_1B=CA=OA-OC$; но $OC=R-r$, следовательно, $O_1B=R-(R-r)=r$. Значит, точка B принадлежит данной окружности центра O_1 и прямая O_1B есть радиус этой окружности. Таким образом, прямая AB перпендикулярна к радиусу O_1B в его конце, лежащем на окружности, а такая прямая есть касательная.

Совершенно таким же способом мы можем построить другую общую касательную A_1B_1 (черт. 125). Прямые AB и A_1B_1 называются *внешними* общими касательными.

2. Можно еще провести две в н у т р е н н и е касательные следующим образом.

А н а л и з. Предположим, что задача решена (черт. 126). Пусть AB будет искомая касательная. Проведем радиусы OA и O_1B в точки касания A и B. Эти радиусы, будучи оба перпендикулярны к общей касательной, параллельны между собой. Вообразим, что касательная AB перемещена параллельным перенесением так, что точка B, скользя по радиусу BO_1, перейдет в O_1. Тогда касательная займет такое положение CO_1, при котором $AC=BO_1$ и $OC \perp CO_1$. Вследствие этого окруж-



Черт. 126

ность, описанная радиусом OC из центра O, будет касаться прямой CO_1 в точке C. Радиус этой вспомогательной окружности известен: он равен $OA+AC=OA+O_1B=R+r$, т. е. он равен сумме радиусов данных окружностей.

Построение. Из точки O как из центра описываем окружность радиусом, равным сумме $R+r$, из O_1 проводим к этой окружности касательную O_1C; точку касания C соединяем с точкой O; наконец, через точку A, в которой OC пересекается с данной окружностью, проводим $AB \| O_1C$.

Доказательство (синтез) остается то же самое, как и в случае 1.

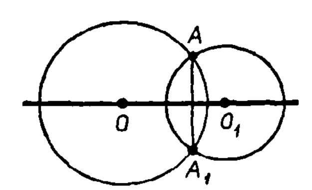
Подобным же образом можно построить другую внутреннюю касательную A_1B_1.

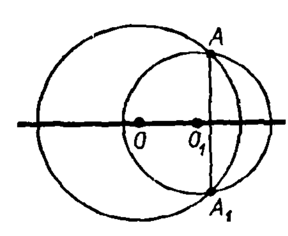
IV. ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ОКРУЖНОСТЕЙ

118. Определения. Если две окружности имеют только одну общую точку, то говорят, что они *касаются*; если же две окружности имеют две общие точки, то говорят, что они *пересекаются*.

Трех общих точек две несливающиеся окружности иметь не могут, потому что в противном случае через три точки можно было бы провести две различные окружности, что невозможно (107).

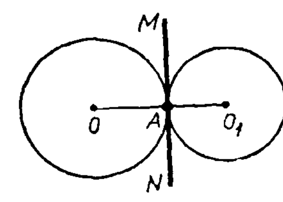
Будем называть *линией центров* бесконечную прямую, проходящую через центры двух окружностей (например, прямую OO_1, черт. 127).





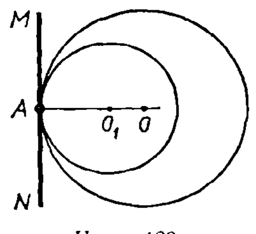
Черт. 127

119. Теорема. Если две окружности (черт. 127) **имеют общую точку** (A), **расположенную вне линии центров, то они имеют еще и другую общую точку** (A_1), **симметричную с первой относительно линии центров** (и, следовательно, такие окружности пересекаются).



Черт. 128

Линия центров, содержа в себе диаметры обеих окружностей, должна быть осью симметрии всей фигуры; поэтому общей точке A, лежащей вне линии центров, должна соответствовать симметричная общая точка A_1, расположенная по другую сторону от оси симметрии (на одном перпендикуляре с ней и на равном расстоянии).



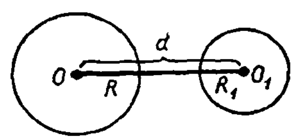
Черт. 129

Следствие. **Общая хорда** (AA_1, черт. 127) **двух пересекающихся окружностей перпендикулярна к линии центров и делится ею пополам.**

120. Теорема. **Если две окружности имеют общую точку (A) на линии их центров, то они касаются** (черт. 128 и 129).

Окружности не могут иметь другой общей точки вне линии центров, потому что в противном случае они имели бы еще третью общую точку по другую сторону от линии центров (**119**) и, следовательно, должны были бы слиться (**107**). Они не могут иметь другой общей точки и на линии центров, так как, имея на этой линии две общие точки, они должны были бы иметь и общую хорду, соединяющую эти точки. Но хорда, проходящая через центры, должна быть диаметром; если же окружности имеют общий диаметр, то они сливаются в одну окружность.

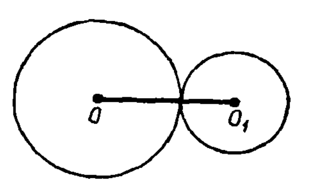
Замечание. Касание двух окружностей называется *внешним*, если они расположены одна вне другой (черт. 128), и *внутренним*, если одна из окружностей лежит внутри другой (черт. 129).



Черт. 130

121. Теорема (обратная предыдущей). **Если две окружности касаются** (в точке A, черт. 128 и 129), **то точка касания лежит на линии центров.**

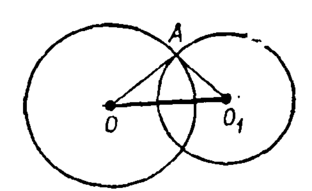
Точка A не может лежать вне линии центров, потому что в противном случае окружности имели бы еще другую общую точку, что противоречит условию теоремы.

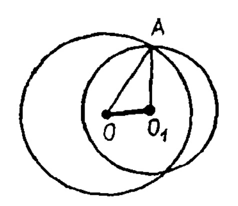


Черт. 131

Следствие. **Две касательные окружности имеют общую касательную в точке касания,** потому что если проведем через точку касания прямую MN (черт. 128 и 129), перпендикулярную к радиусу OA, то эта прямая будет также перпендикулярна и к радиусу O_1A.

122. Различные случаи относительного положения двух окружностей. Обозначим радиусы двух окружностей буквами R и R_1 и расстояние между их центрами буквой d. Рассмотрим, какова зависимость между этими величинами в различных случаях относительного положения двух окружностей. Этих случаев можно указать пять:



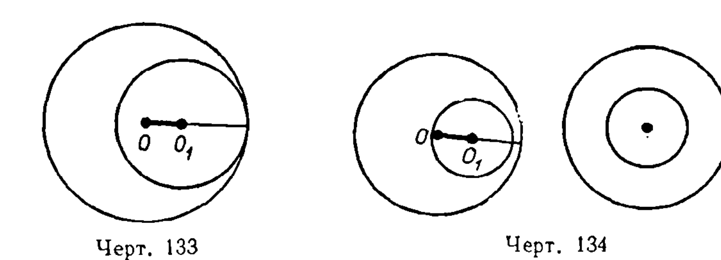


Черт. 132

1. Окружности лежат одна вне другой, не касаясь (черт. 130); в этом случае, очевидно, $d>R+R_1$.

2. Окружности имеют внешнее касание (черт. 131); тогда $d=R+R_1$, так как точка касания лежит на линии центров.

3. Окружности пересекаются (черт. 132); тогда $d<R+R_1$ и в то же время $d>R-R_1$, потому что в $\triangle OAO_1$ сторо-



Черт. 133 Черт. 134

на OO_1, равная d, меньше суммы, но больше разности двух других сторон, равных радиусам R и R_1.

4. Окружности имеют внутреннее касание (черт. 133); в этом случае $d=R-R_1$, потому что точка касания лежит на линии центров.

5. Одна окружность лежит внутри другой, не касаясь (черт. 134); тогда, очевидно, $d<R-R_1$ и в частном случае $d=0$, когда центры обеих окружностей сливаются (такие окружности называются *концентрическими*).

123. Обратные предложения. Так как рассмотренные нами случаи расположения двух окружностей таковы, что каждый из них исключает собой все остальные, и случаи эти сопровождаются такими соотношениями между расстоянием центров и величиной радиусов, которые тоже взаимно друг друга исключают, то обратные предложения должны быть верны (44), а именно:

1. Если $d>R+R_1$, то окружности расположены одна вне другой, не касаясь.

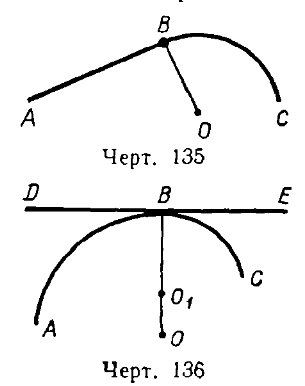
2. Если $d=R+R_1$, то окружности касаются извне.

3. Если $d<R+R_1$ и в то же время $d>R-R_1$, то окружности пересекаются.

4. Если $d=R-R_1$, то окружности касаются изнутри.

5. Если $d<R-R_1$, то одна окружность лежит внутри другой, не касаясь.

Все эти предложения легко доказываются от противного.



Черт. 135

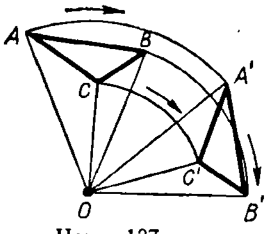
Черт. 136

124. Сопряжение дуги с прямой или с другой дугой. Прямая AB (черт. 135) и дуга окружности BC, сходящиеся в точке B, называются *сопряженными*, если в этой точке они касаются друг друга.

Две дуги AB и BC (черт. 136), сходящиеся в точке B, называются *сопряженными*, если в этой точке они имеют общую касательную DE.

Для сопряжения прямой с дугой необходимо (114), чтобы центр окружности, которой принадлежит дуга, лежал на перпендикуляре к прямой, восстановленном к ней из точки сопряжения.

Для сопряжения одной дуги с другой необходимо (114), чтобы центры двух окружностей, которым принадлежат дуги, лежали на прямой, проходящей через точку сопряжения.



Черт. 137

Сопряжение двух линий (прямой с дугой или двух дуг) делает переход с одной линии на другую плавным, без выступов; оно практикуется, например, при устройстве закруглений железнодорожных или трамвайных путей.

125. Вращение вокруг точки. Пусть какая-нибудь плоская фигура, например $\triangle ABC$ (черт. 137), неизменно связана с некоторой точкой O, принадлежащей плоскости, в которой расположена фигура. Вообразим, что все точки треугольника, в том числе и вершины его, соединены прямыми с точкой O и что вся фигура, образованная этими прямыми, оставаясь в плоскости треугольника, вращается вокруг точки O, положим, что в направлении, указанном на чертеже стрелкой. Пусть после некоторого вращения $\triangle ABC$ займет положение $A'B'C'$. Так как мы предполагаем, что $\triangle ABC$ формы своей при вращении не меняет, то $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ и $CA = C'A'$. Такое перемещение неизменной фигуры в ее плоскости называется *вращением вокруг точки*, а сама точка O, вокруг которой совершается вращение, называется *центром вращения*. Очевидно, что при таком движении все точки перемещающейся фигуры описывают в одном и том же направлении концентрические дуги с общим центром в точке O; радиусы этих дуг равны расстояниям соответствующих точек фигуры от центра вращения.

126. Докажем следующие две теоремы о вращении.

Теорема 1. **Центральные углы, соответствующие концентрическим дугам, описываемым в одинаковое время различными точками вращающейся фигуры, равны между собой.**

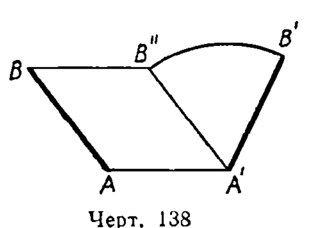
Требуется доказать, что (черт. 137)

$$\angle AOA' = \angle BOB' = \angle COC' = \ldots$$

Действительно, из равенства треугольников AOB и $A'OB'$ (стороны одного равны сторонам другого) следует, что $\angle AOB = \angle A'OB'$. Прибавив к обеим частям этого равенства по углу BOA', получим: $\angle AOA' = \angle BOB'$. Подобным же образом докажем, что $\angle BOB' = \angle COC'$ и т. д.

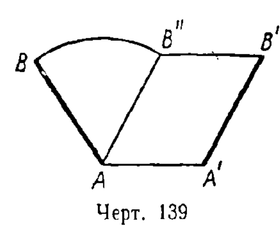
Заметим, что угол, на который поворачиваются все радиусы: AO, BO, CO, . . ., называется *углом вращения* фигуры.

127. Теорема 2. **Всякое перемещение неизменной фигуры в ее плоскости может быть произведено либо параллельным перенесением, либо вращением вокруг точки.**

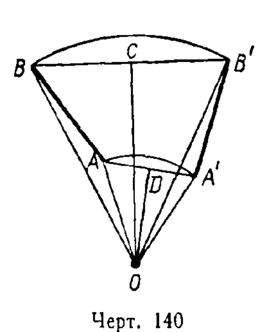


Черт. 138

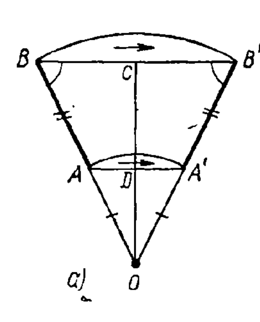
Пусть какая-нибудь фигура F неизменной формы перемещена в ее плоскости в некоторое другое положение F'. Возьмем в фигуре F две какие-нибудь точки A и B, которым в новом положении F' соответствуют точки A'

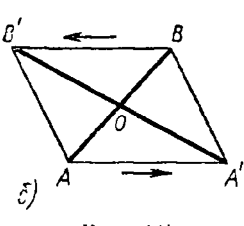


Черт. 139



Черт. 140





Черт. 141

и B' (и, значит, $AB = A'B'$, черт. 138). Докажем, что прямая AB фигуры F может быть перемещена в положение $A'B'$ фигуры F' либо параллельным перенесением, либо вращением вокруг некоторой точки. Прежде всего заметим, что AB всегда можно перевести в $A'B'$ двумя последовательными перемещениями: параллельным перенесением и затем вращением или, наоборот, сначала вращением, а потом параллельным перенесением. Например, как видно из черт. 138, можно прямую AB перенести параллельно самой себе в положение $A'B''$ и затем $A'B''$ вращением вокруг точки A' перенести в $A'B'$ или, как видно из черт. 139, можно AB вращением перевести в положение AB'' и далее параллельным перенесением — в положение $A'B'$. Мы, однако, сейчас убедимся, что AB можно переместить в $A'B'$ только одним из этих двух движений. Соединим прямыми (черт. 140) точку A с A', точку B с B' и через середины образовавшихся отрезков AA' и BB' проведем к ним перпендикуляры CO и DO. Тогда произойдет одно из двух: или эти перпендикуляры пересекутся в некоторой точке O (это будет тогда, когда прямые AA' и BB' не параллельны, как это изображено на черт. 140), или же они не пересекутся (что будет тогда, когда $AA' \| BB'$).

Предположим 1-й случай. Тогда точку пересечения O можно принять за центр вращения. Действительно, из равенства треугольников OAB и $OA'B'$ следует, что $\angle AOB = \angle A'OB'$, а потому и $\angle AOA' = \angle BOB'$; следовательно, при вращении фигуры вокруг центра O на угол, равный углу AOA', точка A перейдет в A' и B в B'.

Возьмем теперь 2-й случай, когда $AA' \| BB'$. Этот случай в свою очередь распадается на два: когда параллельные прямые AA' и BB' имеют одинаковое направление и когда они направлены противоположно друг другу. В первом случае четырехугольник $ABB'A'$ будет или параллелограмм, или равнобочная трапеция. Если это параллелограмм, то AB переходит в $A'B'$ одним параллельным перенесением. Если это равнобочная трапеция, то перпендикуляры CO и DO должны слиться (черт. 141, *а*). Тогда точка O,

пересечение продолжений BA и $B'A'$, будет центром вращения и $\angle BOB'$ — углом вращения. Если же прямые AA' и BB', будучи параллельными, направлены в противоположные стороны (черт. 141, *б*), то прямые AB и $A'B'$ будут диагоналями параллелограмма, и тогда их пересечение O можно принять за центр вращения (угол вращения 180°).

Таким образом, во всех возможных случаях две точки A и B фигуры F могут быть совмещены с соответствующими точками A' и B' фигуры F' одним из двух движений: или параллельным перенесением, или вращением вокруг центра. Но если две точки фигуры F могут быть таким образом совмещены с двумя точками фигуры F', то и вся фигура F окажется совмещенной с фигурой F' (положение неизменной фигуры на плоскости определяется двумя ее точками).

УПРАЖНЕНИЯ

Найти геометрические места

128. Точек, из которых касательные, проведенные к данной окружности, равны данной длине.

129. Точек, из которых данная окружность видна под данным углом (т. е. две касательные, проведенные из каждой точки к окружности, составляют между собой данный угол).

130. Центров окружностей, описанных данным радиусом и касающихся данной прямой.

131. Центров окружностей, касающихся данной окружности в данной точке.

132. Центров окружностей, описанных данным радиусом и касающихся данной окружности (два случая: касание внешнее и касание внутреннее).

133. Прямая данной длины движется параллельно самой себе так, что один ее конец скользит по окружности. Найти геометрическое место, описанное другим концом.

Указание. Возьмем две прямые, изображающие два положения движущейся прямой, и через концы их, лежащие на окружности, проведем радиусы, а через другие концы проведем прямые, параллельные этим радиусам, до пересечения с прямой, проходящей через центр и параллельной движущейся линии. Рассмотрим образовавшиеся параллелограммы.

134. Прямая данной длины движется так, что концы ее скользят по сторонам прямого угла. Найти геометрическое место, описываемое серединой этой прямой.

Доказать теоремы

135. В круге из двух хорд та больше, которая ближе к центру, и, наоборот, из двух хорд та ближе к центру, которая больше.

136. Из всех хорд, проходящих через точку A, взятую внутри круга, наименьшая будет та, которая перпендикулярна к диаметру, проходящему через A.

137. На хорде AB взяты две точки D и E на равном расстоянии от середины C этой хорды и через эти точки восставлены к AB перпендикуляры DF и EG до пересечения с окружностью. Доказать, что эти перпендикуляры равны. (Указание. Перегнуть чертеж по диаметру.)

138. В круге проведены две хорды CC' и DD' перпендикулярно к диаметру AB. Доказать, что прямая MM', соединяющая середины хорд CD и $C'D'$, перпендикулярна к AB.

139. В круге центра O проведена хорда AB и продолжена на расстояние BC, равное радиусу. Через точку C и центр O проведена секущая CD (D — вторая точка пересечения с окружностью). Доказать, что угол AOD равен утроенному углу ACD.

140. Если через центр окружности и данную точку вне ее проведем секущую, то часть ее, заключенная между данной точкой и ближайшей точкой пересечения, есть наименьшее расстояние, а часть, заключенная между данной точкой и другой точкой пересечения, есть наибольшее расстояние этой точки от окружности.

141. Кратчайшее расстояние между двумя окружностями, лежащими одна вне другой, есть отрезок линии центров, заключенный между окружностями.

142. Если через точку пересечения двух окружностей будем проводить секущие, не продолжая их за окружности, то наибольшей из них окажется та, которая параллельна линии центров.

143. Если к двум окружностям, касающимся извне, провести три общие касательные, то внутренняя из них делит пополам тот отрезок каждой внешней, который ограничен точками касания.

144. Все хорды данной длины, проведенные в данной окружности, касаются некоторой другой окружности.

145. Через точку A окружности проведена хорда AB и затем касательная в точке B; диаметр, перпендикулярный радиусу OA, встречает касательную и хорду соответственно в точках C и D. Доказать, что $BC=CD$.

146. К двум окружностям центров O и O_1, касающимся извне в точке A, проведена общая внешняя касательная BC (B и C — точки касания); доказать, что угол BAC есть прямой.

147. Две прямые исходят из одной и той же точки M и касаются окружности в точках A и B. Проведя радиус OB, продолжают его за точку B на расстояние $BC=$ $=OB$. Доказать, что $\angle AMC=3\angle BMC$.

148. Две прямые, исходящие из точки M, касаются окружности в точках A и B. На меньшей из двух дуг, ограниченных точками A и B, берут произвольную точку C и через нее проводят третью касательную до пересечения с MA и MB в точках D и E. Доказать, что: 1) периметр $\triangle MDE$ и 2) угол DOE не изменяются при изменении положения точки C.

149. Параллельно прямой OO', соединяющей центры двух равных окружностей, проведена секущая, которая с окружностью O пересекается в точках A и B и с окружностью O' в точках A' и B'. Доказать, что $AA'=BB'=OO'$.

Задачи на построение

150. Разделить данную дугу на 4, 8, 16, . . . равных частей.

151. По сумме и разности дуг одного и того же радиуса найти эти дуги.

152. Из данной точки как центра описать такую окружность, которая разделила бы данную окружность пополам.

153. На данной прямой найти точку, наименее удаленную от данной окружности.

154. В круге дана хорда. Провести другую хорду, которая делилась бы первой пополам и составляла бы с ней данный угол. (При всяком ли данном угле задача возможна?)

155. Через данную в круге точку провести хорду, которая делилась бы этой точкой пополам.

156. Из точки, данной на стороне угла, описать окружность, которая от другой стороны угла отсекала бы хорду данной длины.

157. Данным радиусом описать окружность, центр которой лежал бы на стороне данного угла и которая от другой стороны его отсекала бы хорду данной длины.

158. Данным радиусом описать окружность, которая касалась бы данной прямой в данной точке.

159. Провести касательную к данной окружности параллельно данной прямой.

160. Описать окружность, которая проходила бы через данную точку A и касалась бы данной прямой в данной на ней точке B.

161. Описать окружность, касательную к сторонам данного угла, причем к одной из них в данной точке.

162. Между двумя параллельными прямыми дана точка; провести окружность, проходящую через эту точку и касающуюся данных прямых.

163. Провести к данной окружности касательную под данным углом к данной прямой. (Сколько решений?)

164. Из точки, данной вне круга, провести к нему секущую так, чтобы ее внутренняя часть равнялась данной длине (исследовать задачу).

165. Данным радиусом описать окружность, проходящую через данную точку, касательную к данной прямой.

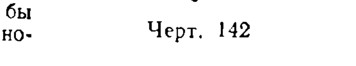
166. На данной прямой найти такую точку, чтобы касательные, проведенные из нее к данной окружности, были данной длины.

167. Построить треугольник, зная один угол и две высоты, из которых одна проведена из вершины данного угла.

168. Даны две окружности; провести к ним секущую так, чтобы внутренние части ее равнялись данным прямым.

169. Даны две точки; провести прямую так, чтобы перпендикуляры, опущенные на нее из этих точек, имели данные длины.

170. Описать окружность, которая проходила бы через данную точку и касалась бы данной окружности в данной точке.



Черт. 142

171. Описать окружность, которая касалась бы двух данных параллельных прямых и круга, находящегося между ними.

172. Данным радиусом описать окружность, которая касалась бы данного круга и проходила бы через данную точку (рассмотреть три случая: данная точка лежит: 1) вне круга, 2) на окружности и 3) внутри круга).

173. Данным радиусом описать окружность, которая касалась бы данной прямой и данного круга.

174. Данным радиусом описать окружность, которая от сторон данного угла отсекала бы хорды данной длины.

175. Описать окружность, касающуюся данного круга в данной точке и данной прямой (два решения).

176. Описать окружность, касающуюся данной прямой в данной точке и данного круга (два решения).

177. Описать окружность, касающуюся двух данных кругов, причем одного из них в данной точке (рассмотреть три случая: 1) искомый круг лежит вне данных; 2) один из данных кругов лежит вне искомого, другой — внутри; 3) оба данных круга лежат внутри искомого).

178. Описать окружность, касающуюся трех равных кругов извне или внутри.

179. В данный сектор вписать окружность, касающуюся к радиусам, ограничивающим сектор, и к дуге сектора.

180. Вписать в данный круг три равные круга, которые касались бы попарно между собой и данного круга.

181. Через точку внутри круга провести хорду так, чтобы разность ее отрезков равнялась данной длине.

182. Через точку пересечения двух окружностей провести секущую так, чтобы часть ее, заключенная внутри окружностей, равнялась данной длине.

183. Из точки, данной вне круга, провести секущую так, чтобы внешняя ее часть равнялась внутренней.

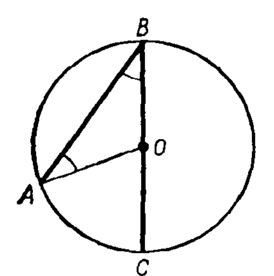
184. Начертить дугу, сопрягающуюся с данной прямой в данной точке и проходящую через данную точку.

185. Соединить две непараллельные прямые сопрягающей их дугой. Рассмотреть три случая: 1) когда точки соединения и радиус дуги не даны; 2) когда дан только радиус дуги; 3) когда дана одна точка соединения, а радиус не дан (примеры такого соединения прямых дугами представляют «закругления» железнодорожного пути).

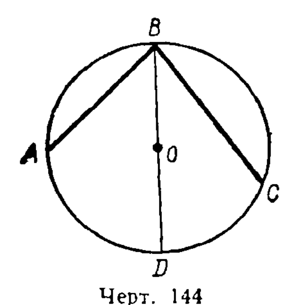
186. Линия, называемая в архитектуре «кривой о трех центрах» (или «полуовальной кривой»), чертится так (черт. 142): делят отрезок AB на три равные части в точках C и D, из этих точек радиусом, равным CD, засекают дуги в точке I; проводят прямые IC и ID и их продолжают; из точек C и D как из центров описывают дуги AE и BF и из точки I — дугу EF. Объяснить, почему дуги AE, EF и FB сопрягаются. Сопрягались ли бы они и тогда, когда AC было бы равно DB, но не равно CD?

V. ВПИСАННЫЕ И НЕКОТОРЫЕ ДРУГИЕ УГЛЫ

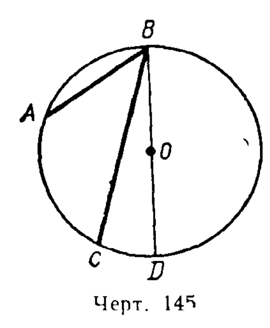
128. Вписанный угол. Угол, образованный двумя хордами, исходящими из одной точки окружности, называется *вписанным* углом. Таков, например, угол ABC (черт. 144). О вписанном угле принято говорить, что он о п и р а е т с я на дугу, заключенную между его сторонами. Так, угол ABC опирается на дугу AC.



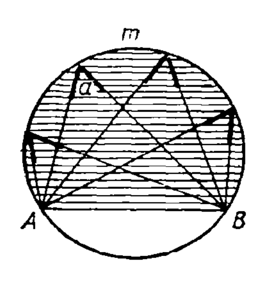
Черт. 143



Черт. 144



Черт. 145



Черт. 146

129. Т е о р е м а. **Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.**

Эту теорему надо понимать так: вписанный угол содержит в себе столько угловых градусов, минут и секунд, сколько дуговых градусов, минут и секунд заключается в половине дуги, на которую он опирается.

При доказательстве теоремы рассмотрим особо три случая:

1. Центр O (черт. 143) лежит н а с т о р о н е вписанного угла ABC.

Проведя радиус AO, мы получим $\triangle ABO$, в котором $OA=OB$ (как радиусы), и, следовательно, $\angle ABO=\angle BAO$. По отношению к этому треугольнику угол AOC есть внешний; поэтому он равен сумме углов ABO и BAO и, значит, равен двойному углу ABO; поэтому угол ABO равен п о л о в и н е центрального угла AOC. Но угол AOC измеряется дугой AC, т. е. он содержит в себе столько угловых градусов, минут и секунд, сколько дуговых градусов, минут и секунд содержится в дуге AC; следовательно, вписанный угол ABC измеряется половиной дуги AC.

2. Центр O лежит м е ж д у с т о р о н а м и вписанного угла (черт. 144).

Проведя диаметр BD, мы разделим угол ABC на два угла, из которых по доказанному в первом случае один измеряется половиной дуги AD, а другой — половиной дуги CD; следовательно, угол ABC измеряется суммой $1/2\,AD+1/2\,DC$, а эта сумма равна $1/2\,(AD+DC)$, т. е. $1/2\ AC$.

3. Центр O лежит в н е в п и с а н н о г о у г л а ABC (черт. 145).

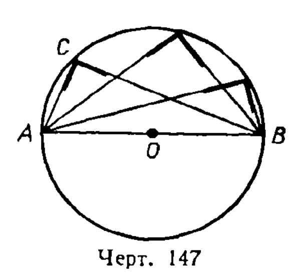
Проведя диаметр BD, мы будем иметь:

$$\angle ABC=\angle ABD-\angle CBD.$$

Но углы ABD и CBD измеряются, по доказанному, половинами дуг AD и CD; следовательно, угол ABC измеряется разностью $1/2\,AD-1/2\,CD$, а эта разность равна $1/2\,(AD-CD)$, т. е. $1/2\ CA$.

130. С л е д с т в и я. **1. Все вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны между собой** (черт. 146), потому что

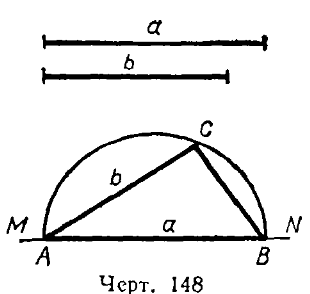
каждый из них измеряется половиной одной и той же дуги. Если величину одного из таких углов обозначим α, то можно сказать, что сегмент AmB (покрытый на чертеже штрихами) вмещает в себе угол, равный α.



Черт. 147

2. **Всякий вписанный угол, опирающийся на диаметр, есть прямой** (черт. 147), потому что каждый такой угол измеряется половиной полуокружности и, следовательно, содержит 90°.

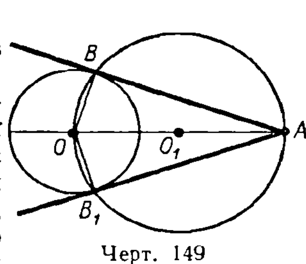
131. Задача. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе a и катету b (черт. 148).



Черт. 148

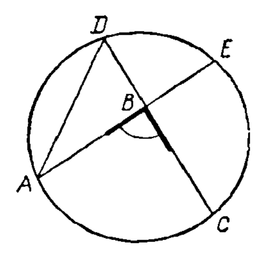
На какой-нибудь прямой MN отложим $AB=a$ и на AB опишем полуокружность. Затем, дав циркулю растворение, равное b, засечем полуокружность из точки A (или B) этим растворением; полученную точку C соединим с концами диаметра AB. Треугольник ACB будет искомый, так как он прямоугольный при точке C и имеет гипотенузу a и катет b.

Замечание. Это построение можно, между прочим, применить в том случае, когда через данную точку A (черт. 149) требуется провести касательную к данной окружности O (**115**). Соединив A с центром O, делим отрезок AO пополам и из полученной середины O_1 описываем окружность радиусом O_1O; через A и точки B и B_1, в которых эта окружность пересекается с данной окружностью, проводим прямые AB и AB_1. Эти прямые и будут касательными (**114**, 1), так как углы OBA и OB_1A (вписанные во вспомогательную окружность и опирающиеся на ее диаметр) прямые и, значит, $AB \perp OB$ и $AB_1 \perp OB_1$.



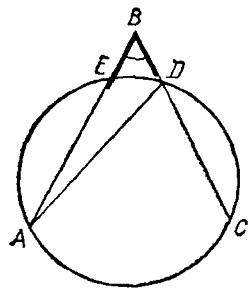
Черт. 149

132. Теоремы. 1. **Угол** (ABC, черт. 150), **вершина которого лежит внутри круга, измеряется полусуммой двух дуг** (AC и DE), **из которых одна заключена между его сторонами, а другая — между продолжениями сторон.**



Черт. 150

2. **Угол** (ABC, черт. 151), **вершина которого лежит вне круга и стороны пересекаются с окружностью, измеряется полуразностью двух дуг** (AC и ED), **заключенных между его сторонами.**

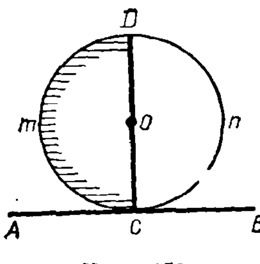


Черт. 151

Проведя хорду AD (на том и на другом чертежах), мы получим $\triangle ABD$, относительно которого рассматриваемый угол ABC служит **внешним**, когда его вершина лежит внутри круга (черт. 150), **внутренним**, когда его вершина лежит вне круга (черт. 151). Поэтому

в первом случае: $\angle ABC = \angle ADC + \angle DAE$;
во втором случае: $\angle ABC = \angle ADC - \angle DAE$.

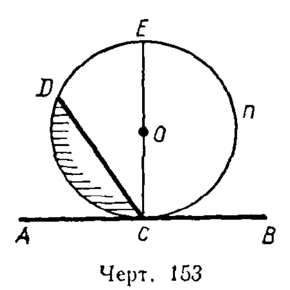
Но углы ADC и DAE, как вписанные, измеряются половинами дуг AC и DE; поэтому угол ABC измеряется в первом случае суммой $1/2\ AC + 1/2\ DE$, которая равна $1/2\,(AC + DE)$, а во втором случае разностью $1/2\ AC - 1/2\ DE$, которая равна $1/2\,(AC - DE)$.



Черт. 152

133. Теорема. **Угол** (ACD, черт. 152 и 153), **составленный касательной и хордой, измеряется половиной дуги, заключенной внутри его.**

Предположим сначала, что хорда CD проходит через центр O, т. е. что эта хорда есть диаметр (черт. 152). Тогда угол ACD прямой (**114**, 2) и, следовательно, равен 90°. Но и половина дуги CmD также равна 90°, так как целая дуга CmD, составляя полуокружность, содержит 180°. Значит, теорема оправдывается в этом частном случае.



Черт. 153

Теперь возьмем общий случай (черт. 153), когда хорда CD не проходит через центр. Проведя тогда диаметр CE, мы будем иметь:

$$\angle ACD = \angle ACE - \angle DCE.$$

Угол ACE, как составленный касательной и диаметром, измеряется по доказанному половиной дуги CDE; угол DCE, как вписанный, измеряется половиной дуги DE; следовательно, угол ACD измеряется разностью $1/2\ CDE - 1/2\ DE$, т. е. половиной дуги CD.

Подобным же образом можно доказать, что **тупой** угол BCD (черт. 153), также составленный касательной и хордой, измеряется половиной дуги $CnED$; разница в доказательстве только та, что этот угол надо рассматривать не как разность, а как сумму прямого угла BCE и острого ECD.

Черт. 154

134. Задача. **На данном отрезке прямой AB построить сегмент, вмещающий данный угол α** (черт. 154).

Анализ. Предположим, что задача решена; пусть сегмент AmB будет такой, который вмещает в себя угол α, т. е. такой, что всякий вписанный в нем угол ACB равен α. Проведем вспомогательную прямую AE, касательную к окружности в точке A. Тогда угол BAE, составленный касательной и хордой, должен равняться вписанному углу ACB, так как и тот, и другой угол измеряется половиной дуги AnB. Примем теперь во внимание, что центр O окружности должен лежать на перпендикуляре DO, проведенном к отрезку AB через его середину, и в то же время он должен лежать и на перпендикуляре AO, восставленном к касательной AE из точки касания. Отсюда выводим следующее построение.

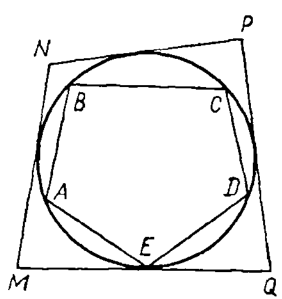
Построение. При конце отрезка AB строим угол BAE, равный углу α; через середину AB проводим перпендикуляр DO и из точки A восставляем перпендикуляр к AE. Пересечение O этих двух перпендикуляров принимаем за центр и радиусом OA описываем окружность.

Доказательство. Сегмент AmB будет искомый, потому что всякий вписанный в нем угол измеряется половиной дуги AnB, а половина этой дуги измеряет также и угол $BAE=\alpha$.

VI. ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

135. Определения. Если все вершины многоугольника ($ABCDE$, черт. 155) лежат на окружности, то говорят, что этот многоугольник вписан в окружность или что окружность описана около него.

Если все стороны какого-нибудь многоугольника ($MNPQ$, черт. 155) касаются окружности, то говорят, что этот многоугольник описан около окружности или что окружность вписана в него.



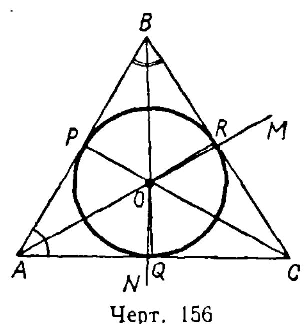
Черт. 155

136. Теоремы. 1. **Около всякого треугольника можно описать окружность и только одну.**

2. **Во всякий треугольник можно вписать окружность и только одну.**

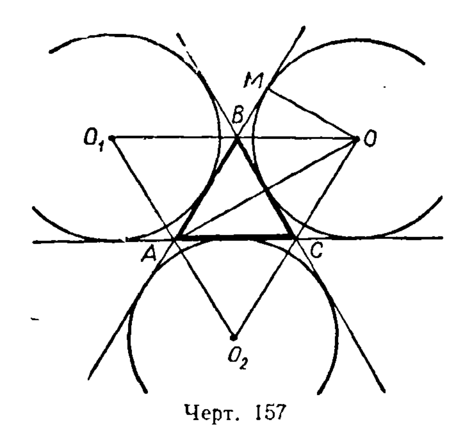
1) Вершины A, B и C всякого треугольника суть три точки, не лежащие на одной прямой; а через такие точки, как мы видели (**107**), всегда можно провести окружность и притом только одну.

2) Если возможна такая окружность, которая касалась бы всех сторон $\triangle ABC$ (черт. 156), то ее центр должен быть точкой, одинаково удаленной от этих сторон. Докажем, что такая точка существует.



Черт. 156

Геометрическое место точек, равноотстоящих от сторон AB и AC, есть биссектриса AM угла A (**56**); геометрическое место точек,



Черт. 157

равноотстоящих от сторон BA и BC, есть биссектриса BN угла B. Эти две биссектрисы должны, очевидно, пересечься внутри треугольника в некоторой точке O. Эта точка и будет равноудаленной от всех сторон треугольника, так как она находится на обоих геометрических местах. Итак, чтобы вписать круг в треугольник, делим какие-нибудь два угла его, например A и B, пополам и точку пересечения биссектрис берем за центр. За радиус возьмем один из перпендикуляров OP, OQ, OR, опущенных из центра на стороны треугольника. Окружность коснется сторон в точках P, Q, R, так как стороны в этих точках перпендикулярны к радиусам в их концах, лежащих на окружности (**114**, 1). Другой вписанной окружности не может быть, так как две биссектрисы пересекаются только в одной точке, а из одной точки на прямую можно опустить только один перпендикуляр.

Замечание. Предоставляем самим учащимся убедиться, что центр описанной окружности лежит внутри треугольника только тогда, когда треугольник остроугольный; в тупоугольном же треугольнике он лежит вне его, а в прямоугольном — на середине гипотенузы. Центр вписанной окружности лежит всегда внутри треугольника.

137. Следствие. Точка O (черт. 156), находясь на одинаковом расстоянии от сторон AC и BC, должна лежать на биссектрисе угла C; следовательно биссектрисы трех углов треугольника сходятся в одной точке.

138. Вневписанные окружности. Так называются окружности (черт. 157), которые касаются одной стороны треугольника и продолжений двух других сторон (они лежат вне треугольника, вследствие чего и получили название вневписанных). Таких окружностей для всякого треугольника может быть три. Чтобы построить их, проводят биссектрисы внешних углов $\triangle ABC$ и точки их пересечений берут за центры. Так, центром окружности, вписанной в угол A, служит точка O, т. е. пересечение биссектрис BO и CO внешних углов, не смежных с A; радиус этой окружности есть перпендикуляр OM, опущенный из O на какую-нибудь сторону треугольника.

139. Свойство вписанного четырехугольника.

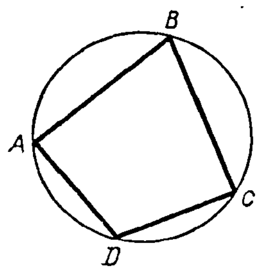
1. В выпуклом вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна двум прямым.

2. Обратно, если в выпуклом четырехугольнике сумма противоположных углов равна двум прямым, то около него можно описать окружность.

1) Пусть $ABCD$ (черт. 158) есть вписанный выпуклый четырехугольник; требуется доказать, что $B+D=2d$ и $A+C=2d$.

Так как сумма всех четырех углов всякого выпуклого четырех-

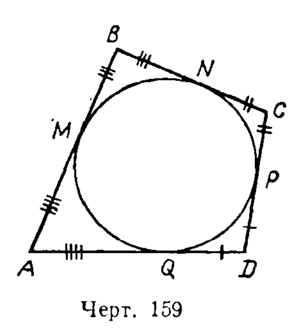
угольника равна $4d$, то достаточно доказать только одно из требуемых равенств. Докажем, например, что $B+D=2d$.



Черт. 158

Углы B и D, как вписанные, измеряются: первый — половиной дуги ADC, второй — половиной дуги ABC; следовательно, сумма $B+D$ измеряется суммой дуг $1/2\ ADC+1/2\ ABC$; а эта сумма равна $1/2(ADC+ABC)$, т. е. равна половине окружности; значит, $B+D=180°=2d$.

2) Пусть $ABCD$ (черт. 158) есть такой выпуклый четырехугольник, у которого $B+D=2d$, и, следовательно, $A+C=2d$. Требуется доказать, что около такого четырехугольника можно описать окружность.



Черт. 159

Через какие-нибудь три его вершины, например через A, B и C, проведем окружность (что всегда можно сделать). Четвертая вершина D должна находиться на этой окружности, потому что в противном случае вершина угла D лежала бы или внутри круга, или вне его и тогда этот угол не измерялся бы половиной дуги ABC (132, 1 и 2); поэтому сумма $B+D$ не измерялась бы полусуммой дуг ADC и ABC, и, значит, сумма $B+D$ не равнялась бы $2d$, что противоречит условию.

Следствия. 1. **Из всех параллелограммов только около прямоугольника можно описать окружность.**

2. **Около трапеции можно описать окружность только тогда, когда она равнобочная.**

140. Свойство описанного четырехугольника.

В описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.

Пусть $ABCD$ (черт. 159) будет описанный четырехугольник, т. е. стороны его касаются окружности; требуется доказать, что $AB+CD=BC+AD$.

Обозначим точки касания буквами M, N, P и Q. Так как две касательные, проведенные из одной точки к окружности, равны (**116**), то $AM=AQ$, $BM=BN$, $CN=CP$ и $DP=DQ$.

Следовательно,

$$AM+MB+CP+PD=AQ+BN+NC+QD,$$

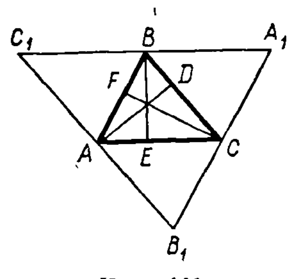
т. е.

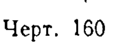
$$AB+CD=AD+BC.$$

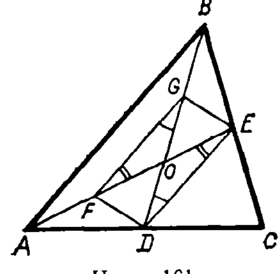
VII. ЧЕТЫРЕ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ

141. Мы видели, что:

1) **три перпендикуляра к сторонам треугольника, проведенные через их середины, сходятся в одной точке,** которая есть центр описанного круга (**107**);




Черт. 160



Черт. 161

2) **биссектрисы углов треугольника сходятся в одной точке,** которая есть центр вписанного круга (137).

Следующие две теоремы указывают еще две замечательные точки треугольника: 3) пересечение высот и 4) пересечение медиан.

142. Теорема. **Три высоты треугольника пересекаются в одной точке.**

Через каждую вершину $\triangle ABC$ (черт. 160) проведем прямую, параллельную противоположной стороне его. Тогда получим вспомогательный $\triangle A_1B_1C_1$, к сторонам которого высоты данного треугольника перпендикулярны. Так как $C_1B=AC=BA_1$ (как противоположные стороны параллелограмма), то точка B есть середина стороны A_1C_1. Подобно этому, убедимся, что C есть середина A_1B_1 и A — середина B_1C_1. Таким образом, высоты AD, BE и CF перпендикулярны к сторонам $\triangle A_1B_1C_1$ и проходят через их середины; а такие перпендикуляры, как мы знаем, пересекаются в одной точке.

Замечание. Точку, в которой пересекаются высоты треугольника, называют *ортоцентром*.

143. Теорема. **Три медианы треугольника пересекаются в одной точке; эта точка отсекает от каждой медианы третью часть, считая от соответствующей стороны.**

Возьмем в $\triangle ABC$ (черт. 161) какие-нибудь две медианы, например AE и BD, пересекающиеся в точке O, и докажем, что $OD={}^1/_3\,BD$ и $OE={}^1/_3\,AE$.

Для этого, разделив OA и OB пополам в точках F и G, построим четырехугольник $DEGF$. Так как прямая FG соединяет середины двух сторон $\triangle ABO$, то (101) $FG \parallel AB$ и $FG={}^1/_2\,AB$. Прямая DE также соединяет середины двух сторон $\triangle ABC$, поэтому $DE \parallel AB$ и $DE={}^1/_2\,AB$. Отсюда выводим, что $DE \parallel FG$ и $DE=FG$; следовательно, четырехугольник $DEGF$ есть параллелограмм (93,2) и потому $OF=OE$ и $OG=OD$. Отсюда следует, что $OE={}^1/_3\,AE$ и $OD={}^1/_3\,BD$. Если теперь возьмем третью медиану с одной из медиан AE и BD, то также убедимся, что точка их пересечения отсекает от каждой из них ${}^1/_3$ часть, считая от основания; значит, третья медиана должна пересечься с медианами AE и BD в одной и той же точке O.

Из физики известно, что пересечение медиан треугольника есть центр тяжести; он всегда лежит внутри треугольника.

УПРАЖНЕНИЯ

Найти геометрические места

187. Оснований перпендикуляров, опущенных из данной точки A на прямые, проходящие через другую данную точку B.

188. Середин хорд, проведенных в окружности через данную внутри ее точку.

189. Точек, из которых данный отрезок прямой виден под данным углом α.

Доказать теоремы

190. Если две окружности касаются, то всякая секущая, проведенная через точку касания, отсекает от окружностей две противолежащие дуги одинакового числа градусов.

191. Отрезки двух равных хорд, пересекающихся в одной окружности, соответственно равны.

192. Две окружности пересекаются в точках A и B; через A проведена секущая, пересекающая окружности в точках C и D; доказать, что угол CBD есть величина, постоянная для всякой секущей.

193. Если через точку касания двух окружностей проведем две секущие и концы их соединим хордами, то эти хорды параллельны.

194. Если через точку касания двух окружностей проведем внутри их какую-либо секущую, то касательные, проведенные через концы этой секущей, параллельны.

195. Если основания высот треугольника соединим прямыми, то получим новый треугольник, для которого высоты первого треугольника служат биссектрисами.

196. На окружности, описанной около равностороннего $\triangle ABC$, взята произвольная точка M; доказать, что одна из прямых: MA, MB, MC — равна сумме остальных двух.

197. Около параллелограмма можно описать окружность только тогда, когда он прямоугольник.

198. Около трапеции можно описать окружность только тогда, когда она равнобочная.

201[1]. Из точки P проведены к окружности две касательные PA и PB и через точку B — диаметр BC. Доказать, что прямые CA и OP параллельны (O — центр окружности).

202. Через одну из точек пересечения двух окружностей проводят диаметр в каждой из них. Доказать, что прямая, соединяющая концы этих диаметров, проходит через вторую точку пересечения окружностей.

203. Диаметр AB и хорда AC образуют угол в 30°. Через C проведена касательная, пересекающая продолжение AB в точке D. Доказать, что $\triangle ACD$ равнобедренный.

205[2]. Если около треугольника опишем окружность и из произвольной точки ее опустим перпендикуляр на стороны треугольника, то их основания лежат на одной прямой (прямая С и м п с о н а).

Задачи на построение

206. На данной бесконечной прямой найти точку, из которой другая данная конечная прямая была бы видна под данным углом.

207. Построить треугольник по основанию, углу при вершине и высоте.

208. К дуге данного сектора провести такую касательную, чтобы часть ее, заключенная между продолженными радиусами (ограничивающими сектор), равнялась данной длине (свести эту задачу на предыдущую).

209. Построить треугольник по основанию, углу при вершине и медиане, проведенной к основанию.

210. Даны по величине и положению две конечные прямые a и b. Найти такую точку, из которой прямая a была бы видна под данным углом α и прямая b под данным углом β.

211. В треугольнике найти точку, из которой его стороны были бы видны под равными углами. (У к а з а н и е. Обратить внимание на то, что каждый из этих углов должен равняться $^4/_3\,d$.)

212. Построить треугольник по углу при вершине, высоте и медиане, проведенной к основанию. (У к а з а н и е. Продолжив медиану на равное расстояние и соединив полученную точку с концами основания, рассмотреть образовавшийся параллелограмм.)

---

[1] Задачи 199 и 200 в настоящем издании выпущены, так как содержание их теперь изложено в § 142 и 143.

[2] Задача 204 выпущена, так как она тождественна задаче 194.

213. Построить треугольник, в котором даны: основание, прилежащий к нему угол и угол, составленный медианой, проведенной из вершины данного угла, со стороной, к которой эта медиана проведена.

214. Построить параллелограмм по двум его диагоналям и одному углу.

215. Построить треугольник по основанию, углу при вершине и сумме или разности двух других сторон.

216. Построить четырехугольник по двум диагоналям, двум соседним сторонам и углу, образованному остальными двумя сторонами.

217. Даны три точки A, B и C. Провести через A такую прямую, чтобы расстояние между перпендикулярами, опущенными на эту прямую из точек B и C, равнялось данной длине.

218. В данный круг вписать треугольник, у которого два угла даны.

219. Около данного круга описать треугольник, у которого два угла даны.

220. Построить треугольник по радиусу описанного круга, углу при вершине и высоте.

221. Вписать в данный круг треугольник, у которого известны сумма двух сторон и угол, противолежащий одной из этих сторон.

222. Вписать в данный круг четырехугольник, сторона которого и два угла, не прилежащие к этой стороне, даны.

223. В данный ромб вписать круг.

224. В равносторонний треугольник вписать три круга, которые попарно касаются друг друга и из которых каждый касается двух сторон треугольника.

225. Из конца A прямой AB восставить к ней перпендикуляр, не продолжая прямой.

226. Построить четырехугольник, который можно было бы вписать в окружность, по трем его сторонам и одной диагонали.

227. Построить ромб по данным стороне и радиусу вписанного круга.

228. Около данного круга описать равнобедренный прямоугольный треугольник.

229. Построить равнобедренный треугольник по основанию и радиусу вписанного круга.

230. Построить треугольник по основанию и двум медианам, исходящим из концов основания.

231. То же — по трем медианам.

232. Дана окружность и на ней три точки A, B и C. Вписать в эту окружность такой треугольник, чтобы его биссектрисы (при продолжении) встречали окружность в точках A, B и C.

233. Та же задача, с заменой биссектрис треугольника его высотами.

234. Дана окружность и на ней три точки M, N и P, в которых пересекаются с окружностью (при продолжении) высота, биссектриса и медиана, исходящие из одной вершины вписанного треугольника. Построить этот треугольник.

235. На окружности даны две точки A и B. Из этих точек провести две параллельные хорды, сумма которых дана.

Задачи на вычисление

236. Вычислить описанный угол, опирающийся на дугу, равную $^1/_{12}$ части окружности.

237. Круг разделен на два сегмента хордой, делящей окружность на части в отношении 5 : 7. Вычислить углы, которые вмещаются этими сегментами.

238. Две хорды пересекаются под углом в 36°15′32″. Вычислить в градусах, минутах и секундах две дуги, заключенные между сторонами этого угла и их продолжениями, если одна из этих дуг относится к другой, как 3 : 2.

239. Угол, составленный двумя касательными, проведенными из одной точки к окружности, равен 25°15′. Вычислить дуги, заключенные между точками касания.

240. Вычислить угол, составленный касательной и хордой, если хорда делит окружность на две части, относящиеся как 3 : 7.

241. Две окружности одинакового радиуса пересекаются под углом в $^2/_3\, d$; определить в градусах меньшую из дуг, заключающихся между точками пересечения.

Примечание. Углом двух пересекающихся дуг называется угол, составленный двумя касательными, проведенными к этим дугам из точки пересечения.

242. Из одного конца диаметра проведена касательная, а из другого — секущая, которая с касательной составляет угол в 20°30′. Как велика меньшая из дуг, заключенных между касательной и секущей?

ОТДЕЛ ТРЕТИЙ

ПОДОБНЫЕ ФИГУРЫ

I. ПОНЯТИЕ ОБ ИЗМЕРЕНИИ ВЕЛИЧИН

144. Общая мера. *Общей мерой* двух отрезков прямой называется такой третий отрезок, который в каждом из первых двух содержится целое число раз без остатка. Так, если отрезок AM (черт. 162) содержится 5 раз в AB и 3 раза в CD, то AM есть общая мера AB и CD.

Подобно этому, может быть общая мера двух дуг одинакового радиуса, двух углов и вообще двух значений одной и той же величины.

145. Три теоремы, на которых основано нахождение наибольшей общей меры. Чтобы найти наибольшую общую меру двух отрезков, употребляют способ последовательного отложения, подобный тому последовательному делению, каким в арифметике находят наибольший делитель двух целых чисел. Этот способ основывается на следующих теоремах:

1. **Если меньший из двух отрезков** (A и B, черт. 163) **содержится в большем целое число раз без остатка, то наибольшая общая мера этих отрезков есть меньший из них.**

Пусть, например, отрезок B содержится в отрезке A ровно 3 раза; так как при этом, конечно, отрезок B содержится в самом себе ровно 1 раз, то B есть общая мера отрезков A и B; с другой стороны, эта мера есть и наибольшая, так как никакой отрезок, больший B, не может содержаться в B целое число раз.

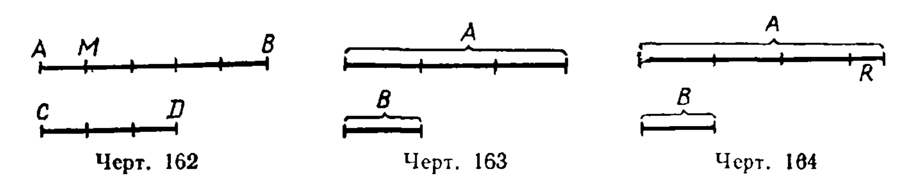
2. **Если меньший из двух отрезков** (B, черт. 164) **содержится в большем** (в A) **целое число раз с остатком** (R), **то наибольшая общая мера этих отрезков, если она существует, должна быть и наибольшей общей мерой меньшего отрезка** (B) **и остатка** (R).

Пусть, например, $A=B+B+B+R$.

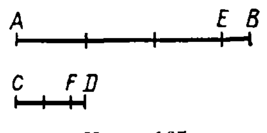
Из этого равенства мы можем вывести следующие два заключения:

1. Если существует отрезок, содержащийся без остатка в B и в R, то он содержится также без остатка и в A; если, например, какой-нибудь отрезок содержится в B ровно 5 раз и в R содержится ровно 2 раза, то в A он содержится $5+5+5+2$, т. е. 17 раз без остатка.

2. Обратно, если существует отрезок, содержащийся без остатка в A и в B, то он содержится также без остатка и в R; если, например, какой-нибудь отрезок содержится в A ровно 17 раз и в B ровно 5 раз, то в той части отрезка A, которая равна $3B$, он содержится 15 раз; следовательно, в оставшейся части отрезка A, т. е. в R, он содержится 17—15, т. е. 2 раза.



Черт. 162 Черт. 163 Черт. 164



Черт. 165

Таким образом, у двух пар отрезков: A и B B и R — должны быть одни и те же общие меры (если они существуют); поэтому и наибольшая общая мера у них должна быть одна и та же.

К этим двум теоремам надо еще добавить следующую аксиому измерения (аксиому Архимеда):

3. Как бы велик ни был больший отрезок (A) и как бы мал ни был меньший отрезок (B), всегда, откладывая меньший на большем последовательно 1, 2, 3 и т. д. раза, мы дойдем до того, что после некоторого m-го отложения или не получится никакого остатка, или получится остаток, меньший меньшего отрезка (B); другими словами, всегда можно найти столь большое целое положительное число m, что $B \cdot m < A$, но $B \cdot (m+1) > A$.

146. Нахождение наибольшей общей меры двух данных отрезков. Пусть требуется найти общую наибольшую меру двух данных отрезков AB и CD (черт. 165). Для этого на большем отрезке откладываем (с помощью циркуля) меньший столько раз, сколько можно. При этом согласно аксиоме измерения случится одно из двух: или 1) CD уложится в AB без остатка, тогда искомая мера согласно теореме 1-й будет CD, или 2) получится остаток EB, меньший CD (как у нас на чертеже); тогда согласно теореме 2-й вопрос сведется к нахождению наибольшей общей меры двух меньших отрезков, именно CD и первого остатка EB. Чтобы найти ее, поступаем по предыдущему, т. е. откладываем EB на CD столько раз, сколько можно. И опять произойдет одно из двух: или 1) EB уложится в CD без остатка, тогда искомая мера и будет EB, или 2) получится остаток FD, меньший EB (как у нас на чертеже); тогда вопрос приведется к нахождению наибольшей общей меры двух меньших отрезков, именно EB и второго остатка FD.

Продолжая этот прием далее, мы можем встретиться с такими двумя возможными случаями:

1) или после некоторого отложения не получится никакого остатка;

2) или же процесс последовательного отложения не будет иметь конца (в предположении, что мы имеем возможность откладывать какие угодно малые отрезки, что, конечно, возможно только теоретически).

В первом случае последний остаток и будет общей наибольшей мерой данных отрезков. Чтобы удобнее вычислить, сколько раз эта общая наибольшая мера содержится в данных прямых, выписываем ряд равенств, получаемых после каждого отложения. Так, при нашем чертеже мы будем иметь:

после 1-го отложения . . . . $AB=3CD+EB$
» 2-го » . . . . $CD=2EB+FD$
» 3-го » . . . . $EB=4FD$

Переходя в этих равенствах от нижнего к верхнему, последовательно находим:

$$EB=4FD,\ CD=(4FD)\cdot 2+FD=9FD,\ AB=(9FD)\cdot 3+4FD=31FD.$$

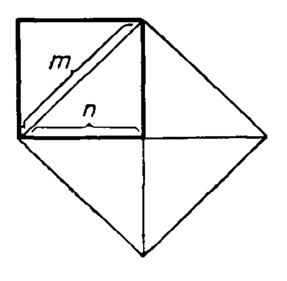
Подобно этому, можно находить наибольшую меру двух дуг одинакового радиуса, двух углов и т. п.

Во втором случае данные отрезки не могут иметь общей меры. Чтобы обнаружить это, предположим, что данные отрезки AB и CD имеют какую-нибудь общую меру. Мера эта, как мы видели, должна содержаться целое число раз не только в AB и CD, но и в остатке EB, следовательно, и во втором остатке FD, и в третьем, и в четвертом, и т. д. Так как остатки эти идут, последовательно уменьшаясь, то в каждом из них общая мера должна содержаться меньшее число раз, чем в предыдущем остатке. Если, например, в EB общая мера содержится 100 раз (вообще m раз), то в FD она содержится менее 100 раз (значит, не более 99 раз); в следующем остатке она должна содержаться менее 99 раз (значит, не более 98 раз) и т. д. Так как ряд целых положительных уменьшающихся чисел: 100, 99, 98 . . . (и вообще: m, $m-1$, $m-2$. . .) имеет конец (как бы велико ни было число m), то и процесс последовательного отложения при достаточном его продолжении должен дойти до конца (т. е. мы дойдем до того, что уже не получится никакого остатка). Значит, если последовательное отложение не имеет конца, то данные отрезки никакой общей меры иметь не могут.

147. Соизмеримые и несоизмеримые отрезки. Два отрезка прямой называются *соизмеримыми*, если они имеют общую меру, и *несоизмеримыми*, когда такой меры не существует.

На практике нет возможности убедиться в существовании несоизмеримых отрезков, потому что, продолжая последовательное отложение, мы всегда дойдем до столь малого остатка, который в предыдущем остатке, по-видимому, укладывается целое число раз. Быть может, при этом и должен был бы получиться некоторый остаток, но по причине неточности инструментов (циркуля) и несовершенства наших органов чувств (зрения) мы не в состоянии его заметить. Однако, как мы сейчас докажем, несоизмеримые отрезки существуют.

148. Несоизмеримость диагонали квадрата с его стороной. Докажем, что диагональ квадрата (черт. 166) не может иметь общей меры со стороной его. Употребим прием доказательства от противного, а именно допустим, что диагональ квадрата и сторона его имеют некоторую наибольшую общую меру p, и посмотрим, к чему приведет нас это допущение. Пусть эта мера p содержится в диагонали m раз и в стороне n раз. Обратим внимание на то, что целые числа m и n должны быть взаимно простые, т. е. они не должны содержать в себе никакого общего множителя, отличного от 1 (потому что в противном случае общая мера p не была бы наибольшей[1]). Построив квадрат на диагонали данного квадрата, мы из чертежа непосредственно видим, что площадь его вдвое больше площади данного квадрата.



Черт. 166

[1] Если бы m и n были числа составные, например такие: 24 и 15, то наибольшая общая мера была бы не p, а $3p$.

Так как площадь квадрата, построенного на диагонали, содержит m^2 единиц площади, а площадь данного квадрата содержит n^2 таких же единиц, то мы должны иметь равенство: $m^2 = 2\,n^2$. Следовательно,

$$\frac{m^2}{n^2} = 2, \text{ или } \left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2.$$

Но это равенство невозможно, так как дробь m/n несократимая, а квадрат несократимой дроби не может равняться целому числу. Значит, нельзя допустить, чтобы диагональ и сторона квадрата имели какую бы то ни было общую меру.

II. ОТНОШЕНИЕ И ПРОПОРЦИЯ

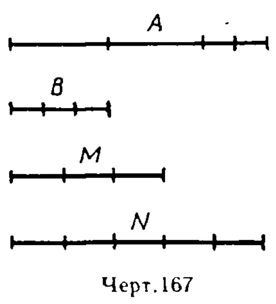
149. Отношение. Отношением одного отрезка прямой (A) к другому отрезку прямой (B) называется *отвлеченное* число, *измеряющее первый отрезок* (A), *когда второй* (B) *принят за единицу.*

Так, если отношение A к B (черт. 167) есть число $2^2/_3$, то это значит, что число $2^2/_3$ измеряет отрезок A, когда отрезок B принят за единицу (другими словами, это значит, что $A = 2^2/_3 B = B \cdot 2^2/_3$); если отношение M к N (тот же чертеж) равно 3/5, то это значит, что отрезок M измеряется числом 3/5, если отрезок N принят за единицу; иначе сказать, $M = N \cdot 3/5$.

Отсюда видно, что отношение можно еще определить и так: отношением одного отрезка прямой к другому называется *отвлеченное* число, на которое надо умножить второй отрезок, чтобы получить первый.

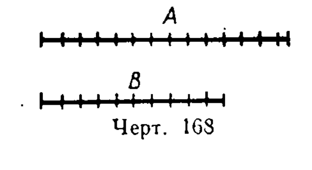
Если рассматривается отношение A к B, то A называется *предыдущим* членом, а B — *последующим* членом отношения.

Из определения видно, что нахождение отношения отрезка A к отрезку B сводится к измерению A при помощи единицы, равной B. При измерении могут представиться два случая: 1) когда отрезки A и B имеют общую меру и такая мера найдена и 2) когда отрезки A и B несоизмеримы. В первом случае результат измерения (следовательно, и отношение) выразится целым числом (если общей мерой окажется сама единица B) или дробным числом (например, $A = 3{,}7\,B$, если общей мерой окажется 1/10 B и она содержится в A ровно 37 раз). Во втором случае результат измерения не может быть выражен точно ни целым, ни дробным числом, но может быть выражен п р и б л и ж е н н о с какой угодно точностью. Пусть, например, мы желаем найти приближенную меру длины A с точностью до 1/10. Это значит, что мы желаем найти число, которое измеряло бы не самую длину A, что невозможно, а некоторую соизмеримую длину, отличающуюся от несоизмеримой длины A менее чем на 1/10 долю единицы B. Для этого делим единицу B на 10 равных частей и одну такую долю укладываем на A столько раз,



Черт.167

сколько можно. Пусть окажется, что 1/10 B содержится в A 13 раз (черт. 168), причем получается остаток, меньший 1/10 B. Тогда каждое из чисел: 13/10 и 14/10 можно принять как приближенную меру длины A, причем первое число будет с недостатком (так как $\frac{13}{10}B<A$), второе — с избытком (так как $\frac{14}{10}B>A$).



Черт. 168

Вообще, чтобы найти приближенные меры длины A с точностью до $1/n$ единицы, делят единицу B на n равных частей и узнают, сколько раз $1/n$ доля единицы содержится в A; если она содержится более m раз, но менее $m+1$ раз, то числа m/n и $(m+1)/n$ будут приближенные меры A с точностью до $1/n$ (первое — с недостатком, второе — с избытком).

Заметим, что этим путем мы можем находить приближенные результаты измерения и тогда, когда измеряемая длина A соизмерима с единицей B; только в этом случае мы, если пожелаем, можем найти также и точный результат, тогда как в случае несоизмеримости такого результата при помощи одних рациональных чисел мы получить не можем.

Число, получившееся после измерения отрезка A, называется *численной мерой* этого отрезка; о нем принято говорить, что оно и з м е р я е т отрезок A в единице, равной B. Числа целые и дробные называются *рациональными* числами.

За точную меру несоизмеримого с единицей отрезка A принимают некоторое и р р а ц и о н а л ь н о е число, которое считается бо́льшим всякого рационального числа, выражающего приближенную меру отрезка A с недостатком, но меньшим всякого рационального числа, выражающего приближенную меру отрезка A с избытком [1].

Два отношения считаются р а в н ы м и, если они представляют собой одно и то же число. Когда отношения не выражаются точно никакими рациональными числами, равенство между ними узнается по следующему признаку:

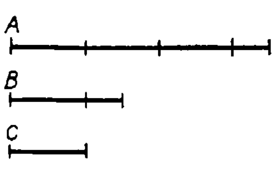
Два отношения равны, если их приближенные рациональные значения, взятые оба с недостатком или оба с избытком и вычисленные с одинаковой точностью, равны между собой при всякой степени точности.

Сказанное об отношении двух отрезков прямой можно повторить об отношении двух углов, двух дуг одинакового радиуса и вообще об отношении двух значений любой величины, доступной измерению.

150. Свойство отношений. Если отрезки A и B измерены при помощи одной и той же единицы C, т о о т н о ш е н и е A к B равно частному от деления числа, измеряющего A, на число, измеряющее B. Пусть, например, от измерения отрезка A единицей C получилось число 7/2 (черт. 169), а от измерения B той же единицей C получилось

---

[1] Об иррациональных числах и действиях над ними более подробно изложено в моих «Элементах алгебры и анализа», § 183 и след.



Черт. 169

число 5/3. Тогда мы можем написать:

$$A=\frac{7}{2}C; \quad B=\frac{5}{3}C.$$

Чтобы найти теперь отношение A к B, достаточно узнать, на какое число следует умножить $\frac{5}{3}C$, чтобы получить $\frac{7}{2}C$, или — что все равно — на какое число надо умножить 5/3 (какой-нибудь единицы), чтобы получить 7/2 (той же единицы). Такое число находится делением; значит, отношение A к B равно

$$\frac{7}{2}:\frac{5}{3}=\frac{21}{10}=2\frac{1}{10}.$$

Вследствие этого отношение A к B принято обозначать с помощью знаков деления, а именно так:

$$A:B \text{ или } \frac{A}{B}.$$

Здесь под буквами A и B согласно указанному сейчас свойству отношения можно разуметь ч и с л а, измеряющие отрезки A и B в какой-нибудь одной и той же единице C.

151. Пропорция и ее свойства. Как известно, пропорцией называется равенство, выражающее, что одно отношение равно другому отношению. Если, например, известно, что отношение двух отрезков A и B равно отношению двух других отрезков A_1 и B_1, то можно написать пропорцию:

$$A:B=A_1:B_1$$

или

$$\frac{A}{B}=\frac{A_1}{B_1}.$$

Когда отрезки A, B, A_1 и B_1 измерены при помощи одной и той же единицы, то каждое из двух отношений, составляющих пропорцию, можно заменить отношением чисел, измеряющих отрезки. После замены получится ч и с л о в а я п р о п о р ц и я, обладающая всеми свойствами числовых пропорций; например:

в пропорции произведение крайних членов равно произведению средних;

в пропорции можно переставить средние члены, крайние члены и средние с крайними;

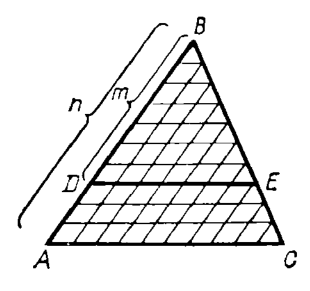
если в пропорции предыдущие члены равны, то равны и последующие члены;

если в пропорции последующие члены равны, то равны и предыдущие и т. п.

III. ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

152. Сходственные стороны. Нам придется сейчас рассматривать такие треугольники или многоугольники, у которых углы одного соответственно равны углам другого. Условимся в таких случаях назы-

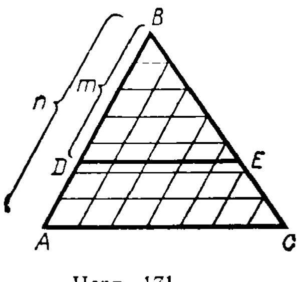
вать **сходственными** те стороны этих треугольников или многоугольников, которые **прилежат** к равным углам (в треугольниках такие стороны также и **противолежат** равным углам).



Черт. 170

153. Определение. Два треугольника называются **подобными**, если углы одного соответственно равны углам другого и стороны одного пропорциональны сходственным сторонам другого.

154. Теорема. **Прямая** (DE, черт. 170), **проведенная внутри треугольника** (ABC) **параллельно какой-нибудь его стороне** (AC), **отсекает от него треугольник** (DBE), **подобный данному.**



Черт. 171

Предстоит доказать, во-первых, равенство углов и, во-вторых, пропорциональность сходственных сторон $\triangle ABC$ и $\triangle DBE$.

1. Углы треугольников соответственно равны, так как угол B у них общий, а $D=A$ и $E=C$, как углы соответственные при параллельных DE и AC и секущих AB и CB.

2. Докажем теперь, что стороны $\triangle DBE$ пропорциональны сходственным сторонам $\triangle ABC$, т. е. что

$$\frac{BD}{AB}=\frac{BE}{BC}=\frac{DE}{AC}.$$

Для этого рассмотрим отдельно следующие два случая.

1) Стороны CB и EB имеют общую меру. Разделим CB на части, равные этой общей мере. Тогда BE разделится на целое число таких частей. Пусть этих частей содержится m в BE и n в CB. Проведем из точек раздела ряд прямых, параллельных AC, и другой ряд прямых, параллельных BA. Тогда BD и BA разделятся на равные части (99), которых будет m в BD и n в BA. Точно так же DE разделится на m равных частей, а AC — на n равных частей, причем части DE равны частям AC (как противоположные стороны параллелограммов). Теперь очевидно, что

$$\frac{BE}{CB}=\frac{m}{n}; \quad \frac{BD}{BA}=\frac{m}{n}; \quad \frac{DE}{AC}=\frac{m}{n}.$$

Следовательно,

$$\frac{BD}{AB}=\frac{BE}{BC}=\frac{DE}{AC}.$$

2) Стороны CB и BE не имеют общей меры (черт. 171).

Найдем приближенное значение каждого из отношений сторон с точностью до $1/n$. Для этого разделим CB на n равных частей и через

точки раздела проведем ряд прямых, параллельных AC, и другой ряд прямых, параллельных BA. Тогда каждая из сторон BA и AC разделится также на n равных частей (99). Предположим, что $1/n$ доля CB содержится в BE более m раз, но менее $m+1$ раз; тогда, как видно из чертежа, $1/n$ доля BA содержится в BD также более m, но менее $m+1$ раз и $1/n$ доля AC содержится в DE более m, но менее $m+1$ раз.

Следовательно,

$$\text{прибл. отн. } \frac{BE}{BC}=\frac{m}{n}; \text{ прибл. отн. } \frac{BD}{BA}=\frac{m}{n};$$

$$\text{прибл. отн. } \frac{DE}{AC}=\frac{m}{n}.$$

Таким образом, приближенные значения отношений, вычисленных с произвольной, но одинаковой точностью, взятые все с недостатком, всегда равны друг другу; а такие отношения должны быть равны (149); следовательно, и в этом случае можем написать:

$$\frac{BD}{BA}=\frac{BE}{BC}=\frac{DE}{AC}.$$

155. Замечание. Доказанный ряд равных отношений представляет собой три следующие пропорции:

$$\frac{BD}{BA}=\frac{BE}{BC}; \quad \frac{BD}{BA}=\frac{DE}{AC}; \quad \frac{BE}{BC}=\frac{DE}{AC}.$$

Переставив в них средние члены, получим:

$$\frac{BD}{BE}=\frac{BA}{BC}; \quad \frac{BD}{DE}=\frac{BA}{AC}; \quad \frac{BE}{DE}=\frac{BC}{AC}.$$

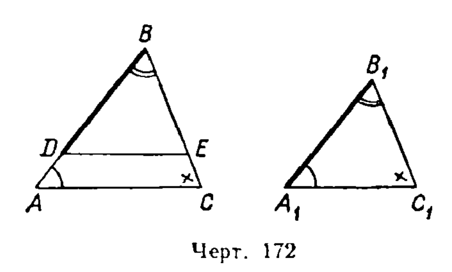
Таким образом, **если в треугольниках стороны пропорциональны, то отношение любых двух сторон одного треугольника равно отношению сходственных сторон другого треугольника.**

156. Т е о р е м ы (выражающие три признака подобия треугольников). **Два треугольника подобны:**

1) **если два угла одного соответственно равны двум углам другого,** или

2) **если две стороны одного пропорциональны двум сторонам другого и углы, лежащие между этими сторонами, равны,** или

3) **если три стороны одного пропорциональны трем сторонам другого.**

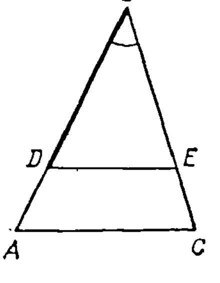


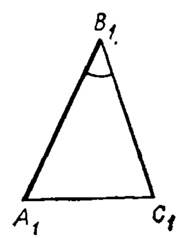
Черт. 172

1) Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ (черт. 172) будут два треугольника, у которых $A=A_1$, $B=B_1$ и, следовательно, $C=C_1$.

Требуется доказать, что такие треугольники подобны. Отложим на AB часть BD, равную A_1B_1, и проведем $DE \| AC$. Тогда получим вспомогательный $\triangle DBE$, который согласно теореме (154) подобен

$\triangle ABC$. С другой стороны, $\triangle DBE = \triangle A_1B_1C_1$, потому что у них $BD = A_1B_1$ (по построению), $B = B_1$ (по условию) и $D = A_1$ (потому что $D = A$ и $A = A_1$). Но очевидно, что если из двух равных треугольников один подобен третьему, то и другой ему подобен; следовательно, $\triangle A_1B_1C_1$ подобен $\triangle ABC$.





Черт. 173

2) Пусть в $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ дано (черт. 173):

$$B = B_1 \text{ и } \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}. \qquad (1)$$

Требуется доказать, что такие треугольники подобны. Отложим снова часть BD, равную A_1B_1, и проведем $DE \| AC$. Тогда получим вспомогательный $\triangle BDE$, подобный $\triangle ABC$. Докажем, что он равен $\triangle A_1B_1C_1$. Из подобия $\triangle ABC$ и $\triangle DBE$ следует:

$$\frac{AB}{DB} = \frac{BC}{BE} = \frac{AC}{DE}. \qquad (2)$$

Сравнивая этот ряд равных отношений с данным рядом (1), замечаем, что первые отношения обоих рядов одинаковы ($DB = A_1B_1$ по построению); следовательно, остальные отношения этих рядов также равны, т. е.

$$\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{BC}{BE}.$$

Но если в пропорции предыдущие члены равны, то должны быть равны и последующие члены; значит,

$$B_1C_1 = BE.$$

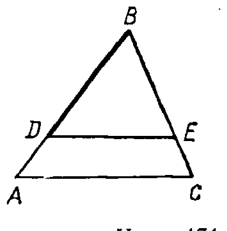
Теперь видим, что $\triangle DBE$ и $\triangle A_1B_1C_1$ имеют по равному углу ($B = B_1$), заключенному между равными сторонами; значит, эти треугольники равны. Но $\triangle DBE$ подобен $\triangle ABC$; поэтому и $\triangle A_1B_1C_1$ подобен $\triangle ABC$.

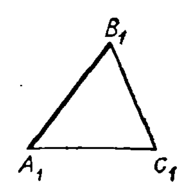
3) Пусть в $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ (черт. 174) дано:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}. \qquad (1)$$

Требуется доказать, что такие треугольники подобны. Сделав построение такое же, как и прежде, докажем, что $\triangle DBE = \triangle A_1B_1C_1$. Из подобия $\triangle ABC$ и $\triangle DBE$ следует:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{BE} = \frac{AC}{DE}. \qquad (2)$$





Черт. 174

Сравнивая этот ряд с данным рядом (1), замечаем, что первые

отношения у них равны; следовательно, и остальные отношения равны, и потому

$$\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{BC}{BE}, \text{ откуда } B_1C_1=BE$$

и

$$\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{AC}{DE}, \text{ откуда } A_1C_1=DE.$$

Теперь видим, что $\triangle DBE$ и $\triangle A_1B_1C_1$ имеют по три соответственно равные стороны; значит, они равны. Но один из них, именно $\triangle DBE$, подобен $\triangle ABC$, следовательно и другой, $\triangle A_1B_1C_1$, подобен $\triangle ABC$.

157. Замечание. Полезно обратить внимание на то, что прием доказательства, употребленный нами в трех предыдущих теоремах, один и тот же, а именно, отложив на стороне большего треугольника часть, равную сходственной стороне меньшего, и проведя прямую, параллельную другой стороне, мы образуем вспомогательный треугольник, подобный большему данному. После этого, беря во внимание условия доказываемой теоремы и свойства подобных треугольников, мы обнаруживаем равенство вспомогательного треугольника меньшему данному и, наконец, заключаем о подобии данных треугольников.

158. Теоремы (выражающие признаки подобия прямоугольных треугольников). Так как прямые углы всегда равны друг другу, то на основании доказанных признаков подобия треугольников мы можем утверждать, что **прямоугольные треугольники подобны:**

1) **если острый угол одного треугольника равен острому углу другого треугольника** или

2) **если катеты одного треугольника пропорциональны катетам другого.**

Укажем еще следующий признак подобия прямоугольных треугольников, требующий особого доказательства:

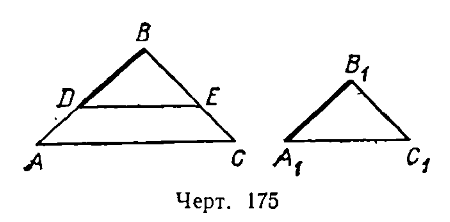
прямоугольные треугольники подобны, если гипотенуза и катет одного пропорциональны гипотенузе и катету другого.

Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — два треугольника (черт. 175), у которых углы B и B_1 прямые и

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}. \quad (1)$$

Требуется доказать, что такие треугольники подобны. Для доказательства употребим тот же прием, которым мы пользовались ранее (156). Отложим $BD=A_1B_1$ и проведем $DE \parallel AC$. Тогда получим вспомогательный $\triangle DBE$, подобный $\triangle ABC$ (154). Докажем, что он равен $\triangle A_1B_1C_1$. Из подобия $\triangle ABC$ и $\triangle DBE$ следует:

$$\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{DE}. \quad (2)$$



Черт. 175

Сравнивая эту пропорцию с данной (1), находим, что первые

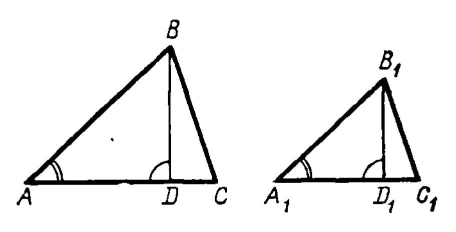
отношения их одинаковы; следовательно, равны и вторые отношения, т. е.

$$\frac{AC}{DE}=\frac{AC}{A_1C_1},$$

откуда

$$DE=A_1C_1.$$

Теперь видим, что $\triangle DBE$ и $\triangle A_1B_1C_1$ имеют по равной гипотенузе и равному катету; следовательно, они равны; а так как один из них подобен $\triangle ABC$, то и другой ему подобен.

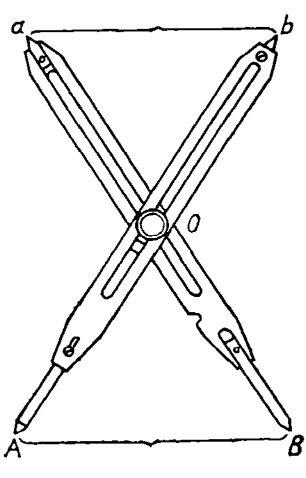


Черт. 176

159. Теорема (выражающая свойство подобных треугольников). **В подобных треугольниках сходственные стороны пропорциональны сходственным высотам,** т. е. тем, которые опущены на сходственные стороны.

Действительно, если $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ (черт. 176) подобны, то прямоугольные $\triangle BAD$ и $\triangle B_1A_1D_1$ также подобны ($A=A_1$ и $D=D_1$); поэтому

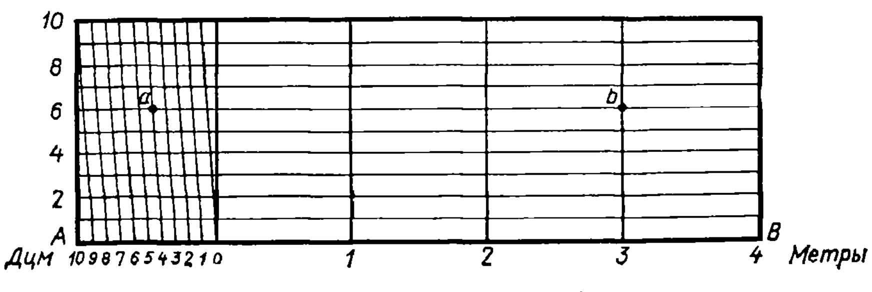
$$\frac{BD}{B_1D_1}=\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{A_1C_1}.$$



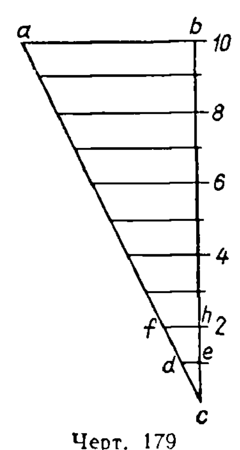
Черт. 177

160. Делительный циркуль. На подобии треугольников основано употребление делительного циркуля, посредством которого можно быстро разделить данный небольшой отрезок на несколько равных частей.

Прибор этот состоит из двух одинаковых ножек (черт. 177) Ab и Ba, концы которых заострены. Вдоль ножек сделаны прорезы, в которых можно передвигать подвижный винт и закреплять его в том или другом месте ножек. Ножки можно раздвигать и сближать, вращая их вокруг винта. Положим, требуется разделить отрезок AB



Черт. 178



Черт. 179

на три равные части. Для этого укрепим винт в такой точке O, чтобы расстояние AO было в 3 раза более расстояния Ob (что легко выполнить по тем делениям и цифрам, которые выставлены по краям прореза). Затем растворяем циркуль на длину AB. Тогда расстояние между остриями a и b будет составлять $^1/_3$ длины AB (так как из подобных $\triangle AOB$ и $\triangle aOb$ следует: $ab : AB = Ob : OA = 1 : 3$). Остается затем, перевернув циркуль, отложить на отрезке AB 3 раза длину ab.

161. Поперечный масштаб. На свойствах подобных треугольников основано также приготовление поперечного масштаба, устройство которого понятно из черт. 178.

Пусть крупные деления линии AB (из которых каждое равно, положим 2 см) представляют в уменьшенном виде (в отношении 1 : 50) метры. Тогда мелкие деления выражают дециметры. Чтобы получить сантиметры, пришлось бы подразделить мелкие деления еще на 10 равных частей, что по причине малости этих частей было бы невыполнимо на линейном масштабе (т. е. на самой линии AB). Поперечный масштаб позволяет отсчитывать и сантиметры. Для разъяснения этого изобразим отдельно (в увеличенном виде, черт. 179) тот узкий прямоугольный треугольник, который на нашем чертеже расположен направо.

Параллельные линии отсекают от этого треугольника подобные треугольники, и потому мы можем написать пропорции

$$de : ab = ce : cb = 1 : 10;$$
$$fh : ab = ch : cb = 2 : 10 \text{ и т. д.};$$

значит,

$$de = {}^1/_{10}\, ab; \quad fh = {}^2/_{10}\, ab \text{ и т. д.}$$

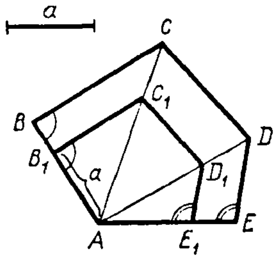
Теперь понятно, что если мы возьмем на нашем масштабе циркулем длину, положим, от точки a до точки b, то длина эта составит:

3 м 4 дм 6 см=3,46 м.

IV. ПОДОБИЕ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

162. Определение. Два одноименных многоугольника называются *подобными*, если углы одного равны соответственно углам другого и стороны одного пропорциональны сходственным сторонам другого.

Что такие многоугольники возможны, будет видно из следующей задачи.



Черт. 180

163. З а д а ч а. Дан многоугольник $ABCDE$ и отрезок прямой a. Построить другой многоугольник, который был бы подобен данному и у которого сторона, сходственная стороне AB данного многоугольника, равнялась бы a (черт. 180).

Всего проще это можно сделать так. На стороне AB отложим $AB_1 = a$ (если $a > AB$, то точка B_1 расположится на продолжении AB).

Затем, проведя из A все диагонали, построим $B_1C_1 \| BC$, $C_1D_1 \| CD$ и $D_1E_1 \| DE$. Тогда мы получим многоугольник $AB_1C_1D_1E_1$, подобный $ABCDE$. Действительно, во-первых, углы одного из них соответственно равны углам другого; так, угол A у них общий, $\angle B_1 = \angle B$ и $\angle E_1 = \angle E$, как углы соответственные при параллельных, $\angle C_1 = \angle C$ и $\angle D_1 = \angle D$, так как углы эти состоят из частей, соответственно друг другу равных. Во-вторых, из подобия треугольников (154) следует:

из подобия AB_1C_1 и ABC $\quad \frac{AB_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{AC_1}{AC}$;

из подобия AC_1D_1 и ACD $\quad \frac{AC_1}{AC} = \frac{C_1D_1}{CD} = \frac{AD_1}{AD}$;

из подобия AD_1E_1 и ADE $\quad \frac{AD_1}{AD} = \frac{D_1E_1}{DE} = \frac{AE_1}{AE}$.

Так как третье отношение первого ряда равно первому отношению второго ряда и третье отношение второго ряда равно первому отношению третьего ряда, то, значит, все 9 отношений равны между собой. Выбросив из них отношения, в которые входят диагонали, можем написать:

$$\frac{AB_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1D_1}{CD} = \frac{D_1E_1}{DE} = \frac{AE_1}{AE}.$$

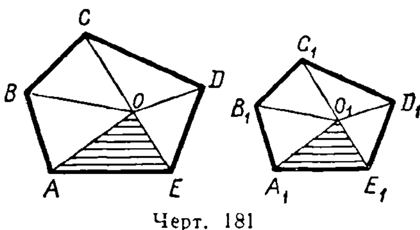
Мы видим, таким образом, что у одноименных многоугольников $ABCDE$ и $AB_1C_1D_1E_1$ углы соответственно равны и сходственные стороны пропорциональны; значит, многоугольники эти подобны.

164. Замечание. Для треугольников, как мы видели (156), равенство углов влечет за собой пропорциональность сторон и, обратно, пропорциональность сторон влечет за собой равенство углов; вследствие этого для треугольников одно равенство углов или одна пропорциональность сторон служит достаточным признаком их подобия. Для многоугольников же одного равенства углов или одной пропорциональности сторон еще не достаточно для их подобия; например, у квадрата и прямоугольника углы равны, но стороны не пропорциональны, у квадрата же и ромба стороны пропорциональны, а углы не равны.

165. Теорема. Подобные многоугольники можно разложить на одинаковое число подобных и одинаково расположенных треугольников.

Например, подобные многоугольники $ABCDE$ и $AB_1C_1D_1E_1$ (черт. 180) разделены диагоналями на подобные треугольники, одинаково расположенные.

Укажем еще такой способ разложения. Возьмем внутри многоугольника $ABCDE$ (черт. 181) произвольную точку O и соединим ее со всеми вершинами. Тогда многоугольник $ABCDE$ разобьется на столько треугольников, сколько в нем сторон. Возьмем один из них, например AOE (покрытый на чертеже штрихами), и на сходственной стороне A_1E_1 другого многоугольника построим углы $O_1A_1E_1$ и $O_1E_1A_1$, соответственно равные



Черт. 181

углам OAE и OEA; точку пересечения O_1 соединим с прочими вершинами многоугольника $A_1B_1C_1D_1E_1$. Тогда и этот многоугольник разобьется на то же число треугольников. Докажем, что треугольники первого многоугольника соответственно подобны треугольникам второго многоугольника. $\triangle AOE$ подобен $\triangle A_1O_1E_1$ по построению. Чтобы доказать подобие соседних $\triangle ABO$ и $\triangle A_1B_1O_1$, примем во внимание, что из подобия многоугольников, между прочим, следует:

$$A = A_1 \text{ и } \frac{BA}{B_1A_1} = \frac{AE}{A_1E_1}, \qquad (1)$$

и из подобия $\triangle AOE$ и $\triangle A_1O_1E_1$ выводим:

$$\angle OAE = \angle O_1A_1E_1 \text{ и } \frac{AO}{A_1O_1} = \frac{AE}{A_1E_1}. \qquad (2)$$

Из равенства (1) и (2) следует:

$$\angle BAO = \angle B_1A_1O_1 \text{ и } \frac{BA}{B_1A_1} = \frac{AO}{A_1O_1}.$$

Теперь видим, что $\triangle ABO$ и $\triangle A_1B_1O_1$ имеют по равному углу, заключенному между пропорциональными сторонами; значит, они подобны.

Совершенно так же докажем подобие $\triangle BCO$ и $\triangle B_1C_1O_1$, затем $\triangle COD$ и $\triangle C_1O_1D_1$ и т. п. При этом очевидно, что подобные треугольники в обоих многоугольниках одинаково расположены.

166. Т е о р е м а. **Периметры подобных многоугольников относятся как сходственные стороны.**

Пусть многоугольники $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ (черт. 181) подобны; тогда по определению

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DE}{D_1E_1} = \frac{EA}{E_1A_1}.$$

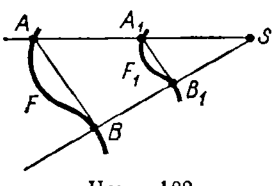
Из алгебры известно, что если имеем ряд равных отношений, то сумма всех предыдущих членов относится к сумме всех последующих, как какой-нибудь из предыдущих членов относится к своему последующему; поэтому

$$\frac{AB+BC+CD+DE+EA}{A_1B_1+B_1C_1+C_1D_1+D_1E_1+E_1A_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} \dots$$

V. ПОДОБИЕ В РАСПОЛОЖЕНИИ

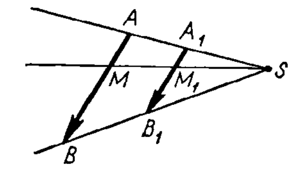
Гомотетичные фигуры

167. Определение. Пусть нам даны: какая-нибудь фигура F (черт. 182), точка S, которую мы назовем ц е н т р о м п о д о б и я, и отвлеченное число k, которое мы назовем о т н о ш е н и е м п о д о б и я. Возьмем в фигуре F произвольную точку A и через нее из центра подобия S проведем полупрямую SA. Найдем на этой полупрямой такую точку A_1, чтобы отношение $SA_1 : SA$ было равно числу k (если $k<1$, например $k=1/2$, то точка A_1 расположится между S и A, как у



Черт. 182

нас на чертеже; если же $k > 1$, например $k = 1^1/_2$, то точка A_1 будет лежать за точкой A). Возьмем какую-нибудь другую точку B фигуры F и сделаем для нее то же построение, какое мы указали для A_1, т. е. через B проведем из S полупрямую и на ней найдем такую точку B_1, чтобы отношение $SB_1 : SB$ равнялось тому же числу k. Вообразим теперь, что, не изменяя положения точки S и величины числа k, мы для каждой точки фигуры F находим указанным путем соответствующую точку; тогда геометрическое место всех этих точек составит некоторую новую фигуру F_1. Фигура F_1, полученная таким образом, называется фигурой, *подобно расположенной* с фигурой F относительно центра подобия S при данном отношении подобия k.



Черт. 183

Полупрямые SA_1, SB_1,. . ., проводимые из центра подобия через различные точки фигуры F, называются *лучами подобия*; точки A и A_1, B и B_1 и т. д. называются *сходственными* точками фигур F и F_1.

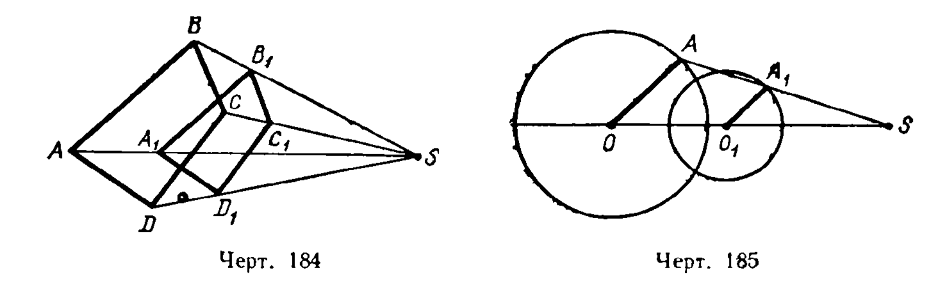
Подобие в расположении называется часто словом *гомотетия*, и фигуры, подобно расположенные, называются тогда *гомотетичными* (слово «гомотетия» означает по-гречески «подобное расположение»).

168. Теорема. **Фигура, подобно расположенная с отрезком прямой** (AB, черт. 183), **есть также отрезок прямой** ($A_1 B_1$), **параллельный первому и одинаково с ним направленный; отношение этого отрезка к первому равно отношению подобия.**

Найдем точки A_1 и B_1, сходственные с концами A и B данного отрезка; эти точки должны лежать на лучах SA и SB и удовлетворять равенствам $SA_1 : SA = SB_1 : SB = k$, где k есть отношение подобия. Соединив A_1 с B_1 прямой, докажем, что $A_1B_1 \| AB$ и что $A_1B_1 : AB = k$. Треугольники SA_1B_1 и SAB подобны, так как они имеют по равному углу (при общей вершине S), заключенному между пропорциональными сторонами. Из их подобия следует, во-первых, равенство углов и, следовательно, параллельность сторон A_1B_1 и AB; во-вторых, пропорциональность сторон: $A_1B_1 : AB = SA_1 : SA = k$.

Теперь докажем, что полученный нами отрезок A_1B_1 есть фигура, подобно расположенная с отрезком AB. Для этого возьмем какую-нибудь точку M на AB и проведем луч SM; пусть M_1 будет точка, в которой этот луч пересекается с A_1B_1. Треугольники SA_1M_1 и SAM подобны, так как углы одного равны соответственно углам другого (вследствие параллельности сторон A_1B_1 и AB). Из их подобия следует: $SM_1 : SM = SA_1 : SA = k$; значит, точка M_1 есть точка, сходственная с M. Таким образом, какую бы точку M на AB мы ни взяли, сходственная ей точка M_1 лежит на A_1B_1. Вообразим теперь, что точка M перемещается по AB от A к B; тогда сходственная ей точка M_1 будет перемещаться от A_1 к B_1, оставаясь постоянно на отрезке A_1B_1. Значит, этот отрезок и будет фигурой, подобно расположенной с AB.

169. Теорема. **Фигура, подобно расположенная с многоугольником** ($ABCD$, черт. 184), **есть также многоугольник** ($A_1B_1C_1D_1$), **по-**



Черт. 184 Черт. 185

добный первому, причем отношение сторон его к сходственным сторонам первого многоугольника равно отношению подобия.

Согласно доказанному сейчас фигура, подобно расположенная с многоугольником $ABCD$, должна быть образована такими отрезками прямых, которые параллельны сторонам данного многоугольника и находятся к ним в отношении, равном отношению подобия; следовательно, фигура $A_1B_1C_1D_1$ есть многоугольник, у которого стороны пропорциональны сторонам данного многоугольника. С другой стороны, так как отрезки A_1B_1, B_1C_1,. . . имеют одинаковое направление с отрезками AB, BC, . . ., то углы многоугольника $A_1B_1C_1D_1$ равны соответственно углам многоугольника $ABCD$; значит, эти многоугольники подобны.

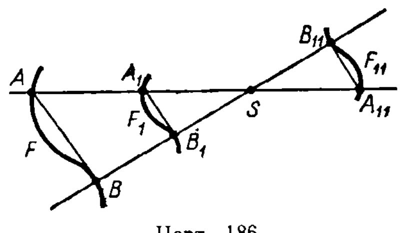
Замечание. Мы видим, таким образом, что прямолинейные фигуры, подобно расположенные, оказываются вместе с тем и подобными. Поэтому фигуры эти называются фигурами *подобными и подобно расположенными.*

170. Теорема. **Фигура, подобно расположенная с окружностью** (центра O, черт. 185), **есть также окружность; центр** (O_1) **этой окружности лежит в точке, сходственной с центром первой окружности; отношение радиуса этой окружности к радиусу первой равно отношению подобия.**

Пусть S есть центр подобия и k — отношение подобия. Возьмем в данной окружности произвольный радиус OA и построим отрезок O_1A_1, подобно расположенный с отрезком OA. По доказанному раньше (168) $O_1A_1 \| OA$ и $O_1A_1 : OA = k$, т. е. $O_1A_1 = OK \cdot k$. Из последнего равенства видно, что длина O_1A_1 не изменяется при изменении положения радиуса OA. Поэтому если станем вращать этот радиус вокруг центра O, то подобно расположенный отрезок O_1A_1 будет вращаться вокруг точки O_1, причем длина его не будет изменяться; значит, точка A_1 опишет при этом окружность, центр которой есть O_1 и радиус O_1A_1, удовлетворяющий равенству $O_1A_1 = OA \cdot k$.

171. Обратное подобие в расположении. Подобно расположенные фигуры можно получить еще иначе, чем было выше указано. Вместо того чтобы точки A_1, B_1,. . ., сходственные с точками A, B,. . . фигуры F, находить на лучах подобия по ту же сторону от центра подобия S, по которую от него расположены точки A, B,. . ., можно брать их на продолжениях лучей подобия по другую сторону от S. Тогда мы

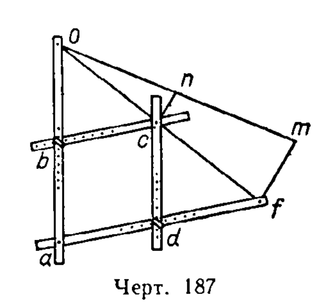
получим фигуру F_{11} (черт. 186), которая тоже подобно расположена с фигурой F относительно центра подобия S при том же отношении подобия k. Для отличия первое из указанных нами подобий в расположении называется *прямым*, а второе — *обратным*. Заметим, что фигуры F_{11} и F_1 равны между собой (при одном и том же отношении подобия k). Действительно, из равенств



Черт. 186

$$SA_{11} : SA = k \text{ и } SA_1 : SA = k$$

следует: $SA_{11} = SA_1$; подобно этому $SB_{11} = SB_1$ и т. д. Поэтому если сектор $SA_1B_1, \ldots$, содержащий фигуру F_1, повернем в плоскости чертежа вокруг точки S на 180°, то точка A_1 совместится с A_{11}, точка B_1 совместится с B_{11} и т. д.; значит, фигура F_1 совместится с фигурой F_{11}. Вследствие этого теоремы § **168** и **170** относятся и к обратному расположению в подобии (предлагаем читателям самим сделать чертежи обратного расположения подобия, соответствующие черт. 183—185).



Черт. 187

172. Пантограф. Так называется прибор, посредством которого можно механически увеличить (или уменьшить) данный рисунок в некоторое число раз. В простейшем своем виде он состоит из четырех линеек (черт. 187), сочлененных между собой в точках a, b, c и d посредством шарнирного приспособления так, что углы четырехугольника $abcd$ можно изменять, сближая точки b и d или раздвигая их. Как видно из чертежа, длины сторон этого четырехугольника также можно изменять.

Предположим, что мы расположили линейки таким образом, чтобы были выполнены следующие два условия:

1) $ab = cd$ и $ad = bc$;

2) $\frac{oa}{ob} = \frac{af}{ad}$.

Тогда при изменении формы четырехугольника он всегда будет оставаться параллелограммом (93) и, кроме того, три точки o, c и f всегда будут лежать на одной прямой. Чтобы убедиться в последнем, вообразим, что мы провели две прямые: одну через точки o и c и другую через точки o и f (пока мы не знаем, сливаются ли эти прямые или нет). Тогда образуются два треугольника obc и oaf, у которых углы при вершинах b и a будут равны (как соответственные углы при параллельных прямых) и стороны, заключающие эти углы, пропорциональны (так как, заменив в условии 2-м ad через bc, мы получим пропорцию $oa : ob = af : bc$). Вследствие этого эти треугольники подобны, и потому их углы при вершине o равны, и, следовательно, наши две прямые сливаются, так что точки o, c и f оказываются лежащими на одной прямой (на одном луче подобия).

Теперь легко понять, как можно пользоваться пантографом. Пусть в точках c и f мы вставили карандаши, а точку o укрепим в плоскости чертежа посредством какого-нибудь острия, проходящего через отверстие в линейке. Если будем обводить карандашом, помещенным в c, контур какой-нибудь начерченной фигуры (на-

пример, линию *cn*, указанную на нашем чертеже), то карандаш, помещенный в *f*, опишет гомотетичный контур, соответствующий центру подобия в точке *o*, при отношении подобия *oc* : *of*, равном *ob* : *oa*. Отношение это можно изменять по желанию, перемещая точку *b* (следовательно, и *d*) вдоль линейки *ao* (и *af*).

VI. НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ О ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ ЛИНИЯХ

173. Т е о р е м а. **Стороны угла** (ABC), **пересекаемые рядом параллельных прямых** (DD_1, EE_1, FF_1,. . .), **рассекаются ими на пропорциональные части** (черт. 188).

Требуется доказать, что

$$\frac{BD}{BD_1}=\frac{DE}{D_1E_1}=\frac{EF}{E_1F_1}\dots$$

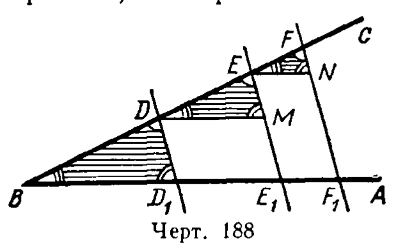
(или $BD : DE = BD_1 : D_1E_1$; $DE : EF = D_1E_1 : E_1F_1$ и т. д.).

Проведя вспомогательные прямые DM, EN,. . ., параллельные BA, мы получим треугольники BDD_1, DEM, EFN,. . ., которые все подобны между собой, так как углы у них соответственно равны (вследствие параллельности прямых). Из их подобия следует:

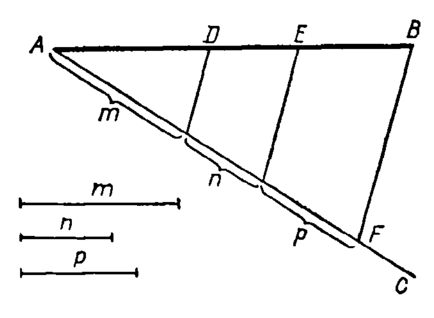
$$\frac{BD}{BD_1}=\frac{DE}{DM}=\frac{EF}{EN}=\dots$$

Заменив в этом ряду равных отношений отрезок DM на D_1E_1, отрезок EN на E_1F_1. . . (противоположные стороны параллелограммов равны), мы получим то, что требовалось доказать.

174. З а д а ч а. Р а з д е л и т ь о т р е з о к п р я м о й AB (черт. 189) н а т р и ч а с т и п р о п о р ц и о н а л ь н о р я д у m:n:p, г д е m, n и p с у т ь д а н н ы е о т р е з к и и л и д а н н ы е ч и с л а.



Черт. 188

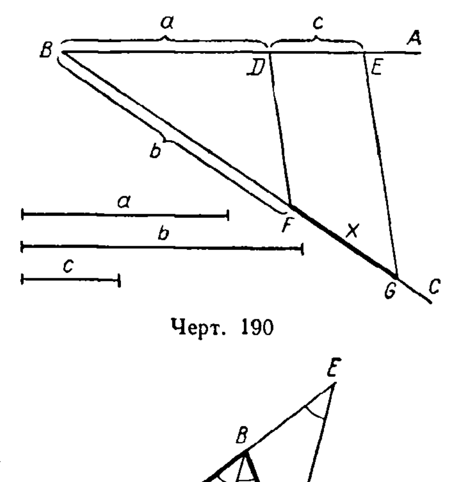


Черт. 189

Проведя неограниченную прямую AC под произвольным углом к AB, отложим на ней от точки A части, равные прямым m, n и p. Точку F, составляющую конец p, соединяем с B и через точки отложения проводим прямые, параллельные BF. Тогда AB разделится в точках D и E на части, пропорциональные $m : n : p$ (173).

Если m, n и p означают какие-нибудь числа, например 2, 5, 3, то построение выполняется так же, с той разницей, что на AC откладываются отрезки, равные 2, 5 и 3 произвольным единицам длины.

Конечно, указанное построение применимо к делению не только на три части, но и на какое угодно иное число частей.



Черт. 190

Черт. 191

175. Задача. К трем данным отрезкам прямой a, b и c найти четвертый пропорциональный (черт. 190), т. е. найти такой отрезок x, который удовлетворил бы пропорции $a : b = c : x$.

На сторонах произвольного угла ABC откладываем части $BD=a$, $BF=b$, $DE=c$. Проведя затем через D и F прямую, построим $EG \| DF$. Отрезок FG будет искомый (**173**).

176. Теорема (выражающая свойство биссектрисы внутреннего угла треугольника). **Биссектриса** (BD, черт. 191) **любого угла треугольника** (ABC) **делит противолежащую сторону на части** (AD и DC), **пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.**

Требуется доказать, что если $\angle ABD = \angle DBC$, то $AD : DC = AB : BC$.

Проведем $CE \| BD$ до пересечения в точке E с продолжением стороны AB. Тогда согласно теореме § **173** мы будем иметь пропорцию

$$AD : DC = AB : BE.$$

Чтобы от этой пропорции перейти к той, которую требуется доказать, достаточно обнаружить, что $BE=BC$, т. е. что $\triangle BCE$ равнобедренный. В этом треугольнике $\angle E = \angle ABD$ (как углы соответственные при параллельных) и $\angle C = \angle DBC$ (как углы накрест лежащие при тех же параллельных). Но $\angle ABD = \angle DBC$ по условию; значит, $\angle E = \angle C$, а потому равны и стороны BC и BE, лежащие против равных углов. Теперь, заменив в написанной выше пропорции BE на BC, получим ту пропорцию, которую требуется доказать.

Численный пример. Пусть $AB=10$, $BC=7$ и $AC=6$. Тогда, обозначив часть AD буквой x, можем написать пропорцию

$$x : (6-x) = 10 : 7.$$

Откуда найдем:

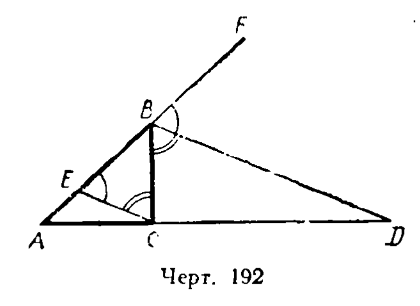
$$7x = (6-x)10 = 60 - 10x;\ 7x + 10x = 60;\ 17x = 60;$$

$$x = \frac{60}{17} = 3\frac{9}{17}.$$

Следовательно,

$$DC = 6 - x = 6 - 3\frac{9}{17} = 2\frac{8}{17}.$$

177. Обратная теорема. **Если какая-нибудь сторона** (AC, черт. 191) **треугольника** (ABC) **разделена на две части** (AD и



Черт. 192

CD), **пропорциональные двум прилежащим сторонам этого треугольника, то прямая (*DB*), соединяющая точку деления с вершиной противолежащего угла, есть биссектриса этого угла.**

Проведя снова $CE \parallel DB$, мы будем иметь две пропорции

$$AD : DC = AB : BE$$

и

$$AD : DC = AB : BC.$$

Три первых члена этих пропорций одинаковы; следовательно, равны и четвертые члены, т. е. $BE = BC$. Значит, $\triangle CBE$ равнобедренный и потому $\angle C = \angle E$. Но $\angle C = \angle DBC$ (как накрест лежащие при параллельных) и $\angle E = \angle DBA$ (как углы соответственные при тех же параллельных); следовательно, $\angle DBC = \angle DBA$, т. е. прямая *BD* есть биссектриса угла *B*.

178. Т е о р е м а (выражающая свойство биссектрисы внешнего угла треугольника). **Если биссектриса (*BD*, черт. 192) внешнего угла (*CBF*) треугольника (*ABC*) пересекает продолжение противоположной стороны (*AC*) в некоторой точке (*D*), то расстояния (*DA* и *DC*) этой точки до концов продолженной стороны пропорциональны прилежащим сторонам треугольника (*AB* и *BC*)**[1].

Проведя $CE \parallel BD$, получим пропорцию (**173**):

$$DA : DC = BA : BE.$$

Так как $\angle BEC = \angle FBD$ (как соответственные), $\angle BCE = \angle CBD$ (как накрест лежащие при параллельных) и углы *FBD* и *CBD* равны по условию, то $\angle BEC = \angle BCE$; значит, $\triangle BCE$ равнобедренный, т. е. $BE = BC$. Подставив в пропорцию вместо *BE* равную длину *BC*, получим ту пропорцию, которую требовалось доказать.

З а м е ч а н и е. Доказательство обратной теоремы предоставляем самим учащимся (оно вполне аналогично § 177).

VII. ЧИСЛОВЫЕ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА И НЕКОТОРЫХ ДРУГИХ ФИГУР

179. Т е о р е м а. **В прямоугольном треугольнике перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, есть средняя пропорциональная между отрезками гипотенузы, а каждый катет есть средняя пропорциональная между гипотенузой и прилежащим к этому катету отрезком.**

Пусть *AD* (черт. 193) есть перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла *A* на гипотенузу *BC*. Требуется доказать следующие три

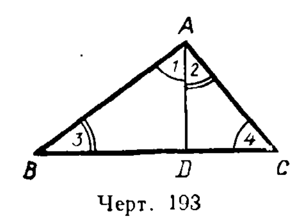
---

[1] Биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника не пересекает продолжения основания его.

пропорции:

$$1)\ \frac{BD}{AD}=\frac{AD}{DC};\quad 2)\ \frac{BC}{AB}=\frac{AB}{DB};$$

$$3)\ \frac{BC}{AC}=\frac{AC}{DC}.$$



Черт. 193

Первую пропорцию мы докажем из подобия треугольников ABD и ADC, у которых AD — общая сторона. Эти треугольники подобны, потому что $\angle 1=\angle 4$ и $\angle 2=\angle 3$ вследствие перпендикулярности их сторон (77). Возьмем в $\triangle ABD$ те стороны BD и AD, которые составляют первое отношение доказываемой пропорции; сходственными сторонами в $\triangle ADC$ будут AD и DC; поэтому

$$BD : AD = AD : DC.$$

Вторую пропорцию докажем из подобия треугольников ABC и ABD, у которых AB — общая сторона. Эти треугольники подобны, потому что они прямоугольные и острый угол B у них общий. В $\triangle ABC$ возьмем те стороны BC и AB, которые составляют первое отношение доказываемой пропорции; сходственными сторонами в $\triangle ABD$ будут AB и BD; поэтому

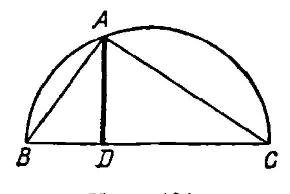
$$BC : AB = AB : BD.$$

Третью пропорцию докажем из подобия треугольников ABC и ADC, у которых AC — общая сторона. Эти треугольники подобны, потому что они оба прямоугольные и имеют общий острый угол C. В $\triangle ABC$ возьмем стороны BC и AC; сходственными сторонами в $\triangle ADC$ будут AC и DC; поэтому

$$BC : AC = AC : DC.$$

180. Следствие. Пусть A (черт. 194) есть произвольная точка окружности, описанной на диаметре BC. Соединив концы диаметра с этой точкой, мы получим прямоугольный $\triangle ABC$, у которого гипотенуза есть диаметр, а катеты суть хорды. Применяя доказанную выше теорему к этому треугольнику, приходим к следующему заключению:

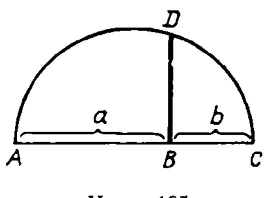
перпендикуляр, опущенный из какой-нибудь точки окружности на диаметр, есть средняя пропорциональная (величина) между отрезками диаметра, а хорда, соединяющая эту точку с концом диаметра, есть средняя пропорциональная между диаметром и прилежащим к хорде отрезком его.



Черт. 194

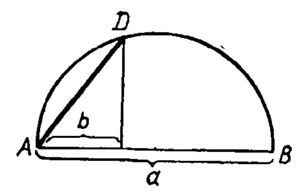
181. Задача. Построить среднюю пропорциональную между двумя конечными прямыми a и b.

Задачу эту можно решить двояким путем.



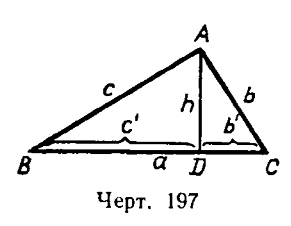
Черт. 195

1. На произвольной прямой (черт. 195) откладываем части $AB=a$ и $BC=b$; на AC как на диаметре описываем полуокружность; из B восставляем до пересечения с окружностью перпендикуляр BD. Этот перпендикуляр и есть искомая средняя пропорциональная между AB и BC.



Черт. 196

2. На произвольной прямой (черт. 196) откладываем от точки A части a и b. На большей из этих частей описываем полуокружность. Проведя из конца меньшей части перпендикуляр к AB до пересечения его с окружностью в точке D, соединяем A с D. Хорда AD есть средняя пропорциональная между a и b.



Черт. 197

182. Теорема. **Если стороны прямоугольного треугольника измерены одной и той же единицей, то квадрат числа, выражающего гипотенузу, равен сумме квадратов чисел, выражающих катеты.**

Пусть ABC (черт. 197) есть прямоугольный треугольник и AD — перпендикуляр, опущенный на гипотенузу из вершины прямого угла. Положим, что стороны и отрезки гипотенузы измерены одной и той же единицей, причем получились числа a, b, c, c' и b' (принято численные величины сторон треугольника обозначать малыми буквами, соответствующими большим буквам, которыми обозначены противолежащие углы). Применяя теорему § **179**, можем написать пропорции

$$a : c = c : c' \quad \text{и} \quad a : b = b : b',$$

откуда

$$ac' = c^2 \quad \text{и} \quad ab' = b^2.$$

Сложив эти два равенства, найдем:

$$ac' + ab' = c^2 + b^2, \quad \text{или} \quad a(c' + b') = c^2 + b^2.$$

Но $c' + b' = a$; следовательно, $a^2 = c^2 + b^2$.

Эту теорему обыкновенно выражают сокращенно так: **квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.**

Пример. Положим, что катеты, измеренные какой-нибудь линейною единицей, выражаются числами 3 и 4; тогда гипотенуза в той же единице выразится числом x, удовлетворяющим уравнению $x^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$, откуда $x = \sqrt{25} = 5$.

Замечание. Прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4 и 5 называют часто египетским треугольником, так как он был известен еще древним египтянам. Так, их землемеры для построения прямого угла на земной поверхности пользовались таким приемом:

бечевку посредством узлов они подразделяли на 12 равных частей; затем, связав концы, натягивали ее на земле (посредством кольев) в виде треугольника со сторонами в 3, 4 и 5 делений; тогда угол между сторонами, равными 3 и 4, оказывался прямой [1].

183. Следствие. **Квадраты катетов относятся между собой как прилежащие отрезки гипотенузы.** Действительно, из уравнений предыдущего параграфа находим:

$$c^2 : b^2 = ac' : ab' = c' : b'.$$

184. Замечание 1. К трем уравнениям, которые мы вывели в § 182:

$$1)\ ac' = c^2;\ 2)\ ab' = b^2;\ 3)\ a^2 = b^2 + c^2,$$

можно присоединить еще следующие два:

$$4)\ b' + c' = a \text{ и } 5)\ h^2 = b'c'$$

(если буквой h обозначим численную величину высоты AD). Из этих уравнений третье, как мы видели, составляет следствие первых двух, так что из 5 уравнений только четыре самостоятельны; вследствие этого уравнения позволяют по данным двум из шести чисел находить остальные четыре.

Для примера положим, что нам даны отрезки гипотенузы $b' = 5$ м и $c' = 7$ м; тогда

$$a = b' + c' = 12;\quad c = \sqrt{ac'} = \sqrt{12 \cdot 7} = \sqrt{84} = 9{,}165\ldots,$$
$$b = \sqrt{ab'} = \sqrt{12 \cdot 5} = \sqrt{60} = 7{,}745\ldots,$$
$$h = \sqrt{b'c'} = \sqrt{5 \cdot 7} = \sqrt{35} = 5{,}916\ldots.$$

Замечание 2. В последующих теоремах мы будем сокращенно говорить «квадрат стороны» вместо «квадрат числа, выражающего сторону» или «произведение прямых» вместо «произведение чисел, выражающих прямые». При этом будем подразумевать, что прямые измерены одной и той же единицей.

185. Теорема. **Во всяком треугольнике квадрат стороны, лежащей против острого угла, равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения какой-нибудь из этих сторон на отрезок ее от вершины острого угла до высоты.**

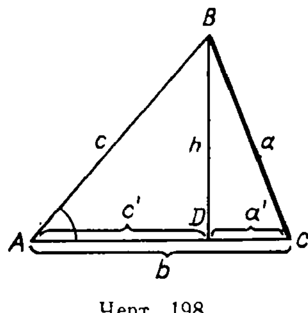
---

[1] Прямоугольные треугольники, у которых стороны измеряются целыми числами, носят название Пифагоровых треугольников. Можно доказать, что катеты x и y и гипотенуза z таких треугольников выражаются следующими формулами:

$$x = 2ab,\ y = a^2 - b^2,\ z = a^2 + b^2,$$

где a и b — произвольные целые числа, не имеющие общих делителей при условии, что $a > b$. Действительно, из этих формул видно:

$$x^2 = 4a^2b^2,\ y^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4,\ x^2 + y^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 = z^2,$$



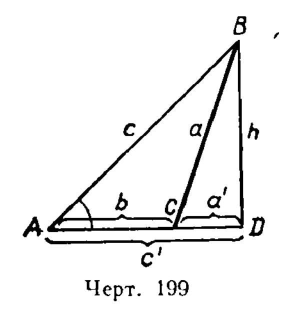
Черт. 198

Пусть BC есть сторона $\triangle ABC$ (черт. 198 и 199), лежащая против острого угла A, и BD — высота, опущенная на какую-либо из остальных сторон, например на AC (или на продолжение AC). Требуется доказать, что

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AD,$$

или, обозначая численные величины линий малыми буквами, как указано на чертеже, надо доказать равенство

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc'.$$



Черт. 199

Из прямоугольного $\triangle BDC$ находим:

$$a^2 = h^2 + (a')^2. \qquad (1)$$

Определим каждый из квадратов h^2 и $(a')^2$. Из прямоугольного $\triangle BAD$ находим:

$$h^2 = c^2 - (c')^2. \qquad (2)$$

С другой стороны, $a' = b - c'$ (черт. 198) или $a' = c' - b$ (черт. 199). В обоих случаях для $(a')^2$ получаем одно и то же выражение:

$$(a')^2 = (b - c')^2 = b^2 - 2bc' + (c')^2; \quad (a')^2 = (c')^2 - 2bc' + b^2. \qquad (3)$$

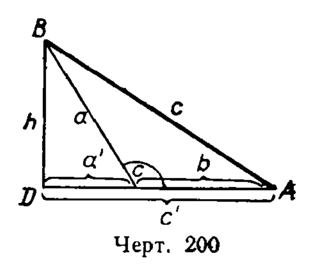
Теперь равенство (1) можно переписать так:

$$a^2 = c^2 - (c')^2 + b^2 - 2bc' + (c')^2 = c^2 + b^2 - 2bc'.$$

186. Теорема. **В тупоугольном треугольнике квадрат стороны, лежащей против тупого угла, равен сумме квадратов двух других сторон, сложенной с удвоенным произведением какой-нибудь из этих сторон на отрезок ее продолжения от вершины тупого угла до высоты.**

Пусть AB есть сторона $\triangle ABC$ (черт. 200), лежащая против тупого угла C, и BD — высота, опущенная на продолжение какой-либо из остальных сторон; требуется доказать, что

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2AC \cdot CD,$$



Черт. 200

или, применяя сокращенные обозначения, указанные на чертеже,

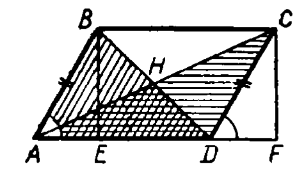
$$c^2 = b^2 + a^2 + 2ba'.$$

Из треугольников ABD и CBD находим:

$$c^2 = h^2 + (c')^2 = a^2 - (a')^2 + (a' + b)^2 =$$
$$= a^2 - (a')^2 + (a')^2 + 2ba' + b^2 = a^2 + b^2 + 2ba',$$

что и требовалось доказать.

187. Следствие. Из трех последних теорем выводим, что квадрат стороны треугольника равен, меньше или больше суммы квадратов других сторон, смотря по тому, будет ли противолежащий угол прямой, острый или тупой; отсюда следует обратное предложение (**44**):



Черт. 201

угол треугольника окажется прямым, острым или тупым, смотря по тому, будет ли квадрат противолежащей стороны равен, меньше или больше суммы квадратов других сторон.

188. Теорема. **Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон** (черт. 201).

Из вершин B и C параллелограмма $ABCD$ опустим на основание AD перпендикуляры BE и CF. Тогда из треугольников ABD и ACD находим:

$$BD^2=AB^2+AD^2-\underline{2AD\cdot AE};$$

$$AC^2=AD^2+CD^2+\underline{2AD\cdot DF}.$$

Прямоугольные треугольники ABE и DCF равны, так как они имеют по равной гипотенузе и равному острому углу; поэтому $AE=DF$. Заметив это, сложим два выведенные выше равенства; тогда подчеркнутые члены взаимно уничтожатся и мы получим:

$$BD^2+AC^2=AB^2+AD^2+AD^2+CD^2=AB^2+BC^2+CD^2+AD^2.$$

VIII. ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ЛИНИИ В КРУГЕ

189. Некоторые пропорциональные линии в круге мы указали ранее (**180**); теперь укажем еще другие.

Теорема. **Если через точку** (M, черт. 202), **взятую внутри круга, проведены какая-нибудь хорда** (AB) **и диаметр** (CD), **то произведение отрезков хорды** ($AM\cdot MB$) **равно произведению отрезков диаметра** ($MD\cdot MC$).

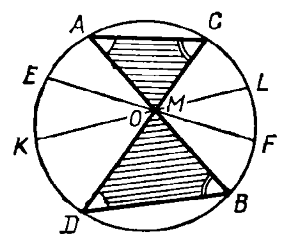
Проведя две вспомогательные хорды AC и BD, мы получим два треугольника AMC и MBD (покрытые на чертеже штрихами), которые подобны, так как у них углы A и D равны, как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу BC, и углы C и B равны, как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу AD.

Из подобия их выводим:

$$AM : MD=MC : MB,$$

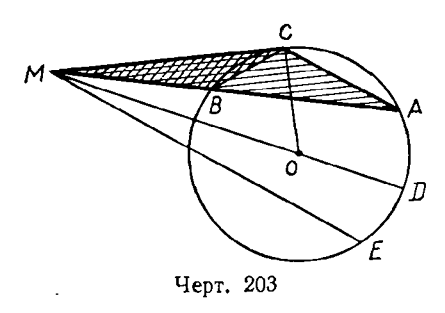
откуда

$$AM\cdot MB=MD\cdot MC.$$



Черт. 202

190. Следствие. **Если через точку** (M, черт. 202), **взятую внутри круга, проведено сколько угодно хорд** (AB, EF, KL, ...), **то произведение отрезков каждой хорды есть**



Черт. 203

число постоянное для всех хорд, так как для каждой хорды это произведение равно произведению отрезков диаметра CD, проходящего через взятую точку M.

191. Т е о р е м а. **Если из точки** (M, черт. 203), **взятой вне круга, проведены к нему какая-нибудь секущая** (MA) **и касательная** (MC), **то произведение секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной** (предполагается, что секущая ограничена второй точкой пересечения, а касательная — точкой касания).

Проведем вспомогательные хорды AC и BC; тогда получим два треугольника MAC и MBC (покрытые на чертеже штрихами), которые подобны, потому что у них угол M общий и углы MCB и CAB равны, так как каждый из них измеряется половиной дуги BC. Возьмем в $\triangle\ MAC$ стороны MA и MC; сходственными сторонами в $\triangle\ MBC$ будут MC и MB; поэтому

$$MA : MC = MC : MB.$$

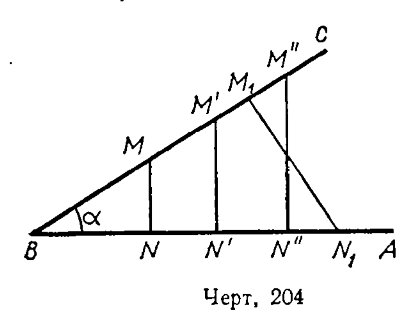
Откуда

$$MA \cdot MB = MC^2.$$

192. С л е д с т в и е. **Если из точки** (M, черт. 203), **взятой вне круга, проведено к нему сколько угодно секущих** (MA, MD, ME, . . .), **то произведение каждой секущей на ее внешнюю часть есть число постоянное для всех этих секущих,** так как для каждой секущей это произведение равно квадрату касательной (MC^2), проведенной через точку M.

IX. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ОСТРОГО УГЛА

193. Определения. Пусть α будет какой-нибудь острый угол (черт. 204). Возьмем на одной из его сторон произвольную точку M и опустим из нее перпендикуляр MN на другую сторону угла. Тогда мы получим прямоугольный $\triangle\ BMN$. Возьмем отношения сторон этого треугольника попарно, а именно:



Черт. 204

$\frac{MN}{BM}$, т. е. отношение катета, противолежащего углу α, к гипотенузе;

$\frac{BN}{BM}$, т. е. отношение катета, прилежащего к углу α, к гипотенузе;

$\frac{MN}{BN}$, т. е. отношение катета, противолежащего углу α, к катету прилежащему; и им обратные

отношения:

$$\frac{BM}{MN};\ \frac{BM}{BN};\ \frac{BN}{MN}.$$

Величина каждого из этих шести отношений не зависит от положения точки M на стороне BC. Действительно, если мы вместо точки M возьмем другие точки M', M'', . . . и опустим перпендикуляры $M'N'$, $M''N''$, . . ., то образовавшиеся треугольники $BM'N'$, $BM''N''$, . . . будут подобны $\triangle BMN$, так как соответственные углы их одинаковы. Так как в подобных треугольниках сходственные стороны пропорциональны, то

$$\frac{MN}{BN}=\frac{M'N'}{BN'}=\frac{M''N''}{BN''}\ldots,$$

$$\frac{BN}{MN}=\frac{BN'}{M'N'}=\frac{BN''}{M''N''}\ldots \text{ и т. д.}$$

Величина каждого из взятых нами отношений не зависит также и от того, на какой стороне угла берется точка M. Если, например, мы возьмем точку N_1 (тот же черт.) на стороне BA и проведем $M_1N_1 \perp BC$, то $\triangle BM_1N_1$ также будет подобен $\triangle BMN$, так как у них имеются по два равных угла, именно по прямому углу и по острому α, который входит и в тот, и в другой треугольник; поэтому

$$\frac{M_1N_1}{BM_1}=\frac{MN}{BN}\ldots \text{ и т. д.}$$

Таким образом, взятые нами отношения не меняются при изменении положения точки M на той или другой стороне угла α, но, конечно, они изменяются при изменении величины самого угла.

Поэтому мы можем сказать, что каждое отношение есть *функция* только угла и характеризует собой величину этого угла.

Все указанные отношения принято называть *тригонометрическими функциями* угла, так как они имеют большое значение в т р и г о н о м е т р и и, рассматривающей соотношения между сторонами и углами треугольников. Чаще других из шести отношений берутся следующие четыре, которым дали особые названия и особые обозначения:

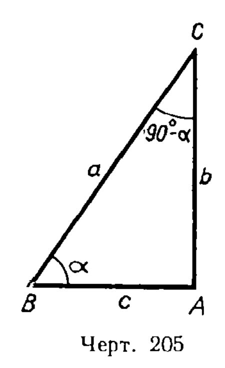
отношение катета, противолежащего углу α, к гипотенузе называется *синусом* угла α и обозначается: $\sin\alpha$;

отношение катета, прилежащего к углу α, к гипотенузе называется *косинусом* угла α и обозначается: $\cos\alpha$;

отношение катета, противолежащего углу α, к катету, прилежащему к нему, называется *тангенсом* угла α и обозначается: $\operatorname{tg}\alpha$ и

отношение прилежащего катета к противолежащему (т. е. отношение, обратное тому, которое называется тангенсом) называется *котангенсом* угла α и обозначается: $\operatorname{ctg}\alpha$.

Заметим, что каждая из указанных функций (как всякое отношение вообще) представляет собой о т в л е ч е н н о е ч и с л о, измеряющее предыдущий член отношения, когда последующий принят за единицу.



Черт. 205

Так как каждый из двух катетов меньше гипотенузы, то синус и косинус всякого угла есть число, меньшее единицы; и так как один катет может быть и больше, и меньше другого катета, и равен ему, то тангенс и котангенс могут выражаться числами и бо́льшими 1, и меньшими 1, и равными 1.

194. Соотношения между тригонометрическими функциями углов $\alpha°$ и $90°-\alpha°$. Пусть в прямоугольном $\triangle ABC$ (черт. 205) угол B равен $\alpha°$; тогда угол C, составляющий дополнение к углу B до $90°$, будет равен $90°-\alpha°$. Выпишем тригонометрические функции этих двух углов и сравним их между собой (для краткости мы обозначим стороны треугольника буквами a, b и c). Тогда согласно определению можем написать:

$\sin\alpha=\frac{b}{a}$	$\sin(90°-\alpha)=\frac{c}{a}$
$\cos\alpha=\frac{c}{a}$	$\cos(90°-\alpha)=\frac{b}{a}$
$\operatorname{tg}\alpha=\frac{b}{c}$	$\operatorname{tg}(90°-\alpha)=\frac{c}{b}$
$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{c}{b}$	$\operatorname{ctg}(90°-\alpha)=\frac{b}{c}$

Из сравнения этих двух табличек находим:

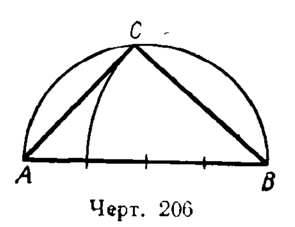
$$\sin\alpha=\cos(90°-\alpha);\quad \cos\alpha=\sin(90°-\alpha)$$
$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}(90°-\alpha);\quad \operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{tg}(90°-\alpha).$$

Таким образом, между тригонометрическими функциями углов α и $90°-\alpha$, дополняющих друг друга до $90°$, существует простая зависимость: с и н у с одного из этих углов равен к о с и н у с у другого и т а н г е н с одного из них равен к о т а н г е н с у другого. Например, $\sin 42°\,20'=\cos(90°-42°\,20')=\cos 47°\,40'$ и $\operatorname{tg} 42°\,20'=\operatorname{ctg} 47°40'$.

195. Построение угла по заданной величине одной из его тригонометрических функций.

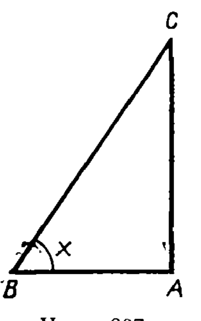
1. Пусть требуется начертить угол, синус которого равняется $^3/_4$. Для этого надо построить такой прямоугольный треугольник, у которого отношение одного из катетов к гипотенузе равнялось бы $^3/_4$, и взять в этом треугольнике тот из острых углов, который противолежит этому катету. Чтобы построить такой треугольник, возьмем какую-нибудь небольшую длину и отложим отрезок AB (черт. 206), равный четырем таким длинам. На AB опишем полуокружность и из точки B как центра радиусом, равным $^3/_4$ гипотенузы, опишем дугу до пересечения ее в точке C с полуокружностью. Соединив C с A и с B, мы получим прямоугольный треугольник, угол которого A и будет иметь синус $^3/_4$.

2. Дано уравнение $\cos x = 0,7$; построить угол x. Эта задача решается так же, как и первая: за гипотенузу возьмем отрезок AB (тот же черт.), равный десяти каким-нибудь одинаковым частям, а за прилежащий катет AC — отрезок в семь таких же частей; тогда угол A, прилежащий к этому катету, и будет искомый.



Черт. 206

3. Построить угол x, зная, что $\operatorname{tg} x = 1^1/_2$. Для этого надо построить такой прямоугольный треугольник, у которого один катет был бы в $1^1/_2$ раза более другого катета. Построив прямой угол (черт. 207), отложим на одной стороне его произвольной длины отрезок AB, а на другой стороне отрезок AC, равный $1^1/_2 AB$. Соединив точки B и C прямой, получим угол B, тангенс которого равен $1^1/_2$.

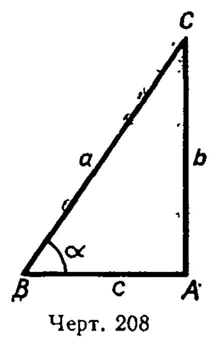


Черт. 207

Такое же построение придется выполнить, когда угол требуется построить по данному котангенсу; только тогда за искомый угол надо взять тот, который прилежит к катету.

196. Зависимости между тригонометрическими функциями одного и того же угла. Простейшие из этих зависимостей следующие четыре:

1) $$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$ [1].



Черт. 208

Доказательство. Из черт. 208 видно, что

$$\sin\alpha = \frac{b}{a}, \quad \cos\alpha = \frac{c}{a};$$

следовательно,

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2+c^2}{a^2}.$$

Но $b^2 + c^2 = a^2$; следовательно, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 1$.

2) $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Доказательство.

$$\sin\alpha : \cos\alpha = \frac{b}{a} : \frac{c}{a} = \frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}; \text{ но и } \operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{c};$$

[1] Выражения $\sin^2\alpha$, $\cos^2\alpha$ и т. п. пишутся для краткости вместо $(\sin\alpha)^2$, $(\cos\alpha)^2$ и т. д.

значит,

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

3) $$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Доказательство.

$$\cos\alpha:\sin\alpha=\frac{c}{a}:\frac{b}{a}=\frac{ac}{ab}=\frac{c}{b}; \text{ но и } \operatorname{ctg}\alpha=\frac{c}{b};$$

значит,

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

4) $$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1,$$

в чем убедимся, если перемножим равенства 2 и 3.

Заметим, что равенство 4 можно писать и так:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}, \text{ или } \operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

197. Вычисление тригонометрических функций угла, если одна из них задана. Пусть требуется по данной величине синуса вычислить все остальные тригонометрические функции.

Прежде всего из зависимости 1) находим:

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha; \quad \cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}.$$

После этого получаем:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}.$$

Так, если $\sin\alpha=0{,}34$, то

$$\cos\alpha=\sqrt{1-0{,}34^2}=\sqrt{1-0{,}1156}=\sqrt{0{,}8844}=0{,}94;$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{0{,}34}{0{,}94}=\frac{34}{94}=0{,}36; \quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{0{,}94}{0{,}34}=2{,}76.$$

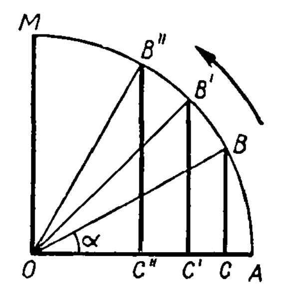
Подобным же образом можно находить тригонометрические функции угла по данной величине косинуса, или тангенса, или котангенса.

198. Изменение тригонометрических функций при изменении угла от 0° до 90°. Чтобы удобнее проследить изменение синуса и косинуса при изменении величины угла, мы предположим, что при этом изменении длина гипотенузы остается постоянной, равной единице длины, а изменяются только катеты. Опишем радиусом OA (черт. 209), равным произвольной единице длины, четверть окружности AM и в ней возьмем какой-нибудь центральный угол $AOB=\alpha$. Опустив из B на ра-

диус OA перпендикуляр BC, мы будем иметь:

$$\sin\alpha=\frac{BC}{OB}=\frac{BC}{1}=\text{числ. велич. } BC;$$

$$\cos\alpha=\frac{OC}{OB}=\frac{OC}{1}=\text{числ. велич. } OC.$$



Черт. 209

Вообразим теперь, что радиус OB вращается вокруг центра O в сторону, указанную на чертеже стрелкой, начиная от OA и кончая OM. Тогда угол α будет увеличиваться от 0° до 90° (переходя через указанные на чертеже величины AOB, AOB', AOB'' и т. д.); численная величина катета BC, противолежащего углу α, будет увеличиваться от 0 (при $\alpha=0°$) до 1 (при $\alpha=90°$); численная величина катета OC, прилежащего к углу α, будет, наоборот, уменьшаться от 1 (при $\alpha=0°$) до 0 (при $\alpha=90°$). Таким образом, **при возрастании угла от 0° до 90° синус его увеличивается от 0 до 1, а косинус уменьшается от 1 до 0.**

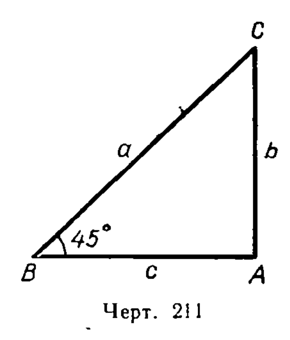
Черт. 210

Проследим теперь изменение тангенса. Так как тангенс есть отношение катета, противолежащего углу, к катету прилежащему, то удобнее будет предположить, что при изменении острого угла прилежащий катет остается неизменным, равным единице длины, а другой катет изменяется. Возьмем отрезок OA, равный единице длины (черт. 210), и примем его за неизменный катет $\triangle\ AOB$, острый угол которого $AOB=\alpha$ станем изменять. Согласно определению

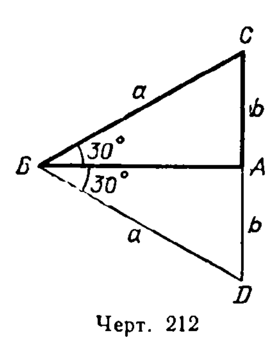
$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{AB}{OA}=\frac{AB}{1}=\text{числ. велич. } AB.$$

Будем теперь перемещать точку B вдоль AN, начиная от A, все выше и выше, через положения B', B'', ... и т. д.; тогда, как видно из чертежа, угол α и его тангенс будут возрастать, причем, когда подвижная точка B совпадает с A, угол α равен 0° и тангенс его будет также 0. Когда точка B поднимается по прямой AN все выше и выше, угол α возрастает, стремясь к углу $AOM=90°$, и численная величина тангенса тоже возрастает, причем она, очевидно, может сделаться больше какого угодно большого числа (возрастает беспредельно, неограниченно). Значит, **при возрастании угла от 0° до 90° тангенс его увеличивается от 0 неограниченно.**

Заметим, что, вместо того чтобы говорить о какой-нибудь изменяющейся величине, что она возрастает неограниченно (беспредельно), говорят иначе, что она возрастает до б е с к о н е ч н о с т и, причем слово «бесконечность» выражают на письме знаком ∞; так что изменение тангенса можно выразить так: при возрастании угла от 0° до 90° тангенс его возрастает от 0 до ∞.



Черт. 211



Черт. 212

Так как котангенс есть число, обратное тангенсу ($\operatorname{ctg}\alpha = 1 : \operatorname{tg}\alpha$), то, когда $\operatorname{tg}\alpha$ возрастает от 0 до ∞, тогда $\operatorname{ctg}\alpha$ убывает от ∞ до 0 [1].

199. Вычисление тригонометрических функций для некоторых углов. Для некоторых углов величины их функций можно найти простыми соображениями. Покажем, например, как можно это сделать для углов в 45°, в 30° и в 60°.

1. Угол 45°. Если (черт. 211) в прямоугольном $\triangle ABC$ угол $B=45°$, то угол C также равен 45°, и тогда $b=c$ и потому $\frac{b}{a}=\frac{c}{a}$, т. е. $\sin 45° = \cos 45°$. Но так как $\sin^2 45° + \cos^2 45° = 1$, то, подставив вместо $\cos 45°$ равный ему $\sin 45°$, мы получим:

$$2\sin^2 45° = 1, \quad \sin^2 45° = \frac{1}{2},$$

$$\sin 45° = \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2}\cdot 1{,}414\ldots = 0{,}707\ldots;$$

$$\cos 45° = 0{,}707\ldots; \quad \operatorname{tg} 45° = 1; \quad \operatorname{ctg} 45° = 1.$$

2. Угол в 30°. Если (черт. 212) в прямоугольном $\triangle ABC$ угол $B=30°$, то угол $C=60°$. Поэтому если продолжим CA на расстояние $AD=AC$ и соединим D с B, то получим равноугольный и, следовательно, равносторонний $\triangle DBC$. Из него находим: $CD=BC$, т. е. $2b=a$, и потому $b=\frac{1}{2}a$. Тогда

$$\sin 30° = \frac{b}{a} = \frac{\frac{1}{2}a}{a} = \frac{1}{2};$$

$$\cos 30° = \sqrt{1-\sin^2 30°} = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0{,}866\ldots;$$

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3} = 0{,}577\ldots;$$

$$\operatorname{ctg} 30° = \frac{\cos 30°}{\sin 30°} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} = 1{,}732\ldots.$$

[1] Изменение тангенса и котангенса можно проследить и исходя из формул

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

3. Угол в 60°. Для этого угла тригонометрические функции всего проще найти при помощи угла в 30°, дополняющего угол в 60° до 90°:

$$\sin 60° = \cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0{,}866\ldots; \quad \cos 60° = \sin 30° = \frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} 60° = \operatorname{ctg} 30° = 1{,}732\ldots; \quad \operatorname{ctg} 60° = \operatorname{tg} 30° = 0{,}577\ldots.$$

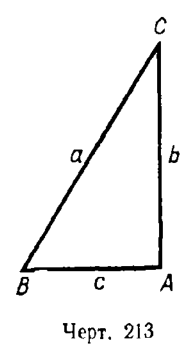
200. Графический прием. Для других углов тригонометрические функции можно находить (приближенно) графическим путем.

Положим, например, требуется найти функции угла в 35°. Для этого начертим на бумаге (лучше всего на миллиметровой) такой прямоугольный треугольник, у которого один из острых углов был бы в 35° (такой угол строится по транспортиру), затем измерим его стороны и вычислим надлежащие отношения этих сторон, т. е., например, для синуса 35° найдем отношение катета, лежащего против угла в 35°, к гипотенузе. Для большей точности треугольник лучше начертить по возможности большой (например, с гипотенузой в 200, 300 и более миллиметров). Положим, что при гипотенузе в 200 мм противоположный катет оказался в 115 мм (приблизительно). Тогда для $\sin 35°$ мы найдем число $\frac{115}{200} = 0{,}575$. Конечно, способ этот может дать только приблизительные величины.

В высшей математике указываются способы, позволяющие вычислить тригонометрические функции для всякого угла с какой угодно точностью.

201. Таблица тригонометрических функций. В конце этой книги приложена таблица, в которой выписаны тригонометрические функции (с точностью до пятого десятичного знака) для всех углов, выражаемых целым числом градусов, от 1° до 90°. Таблица эта расположена так: в первой слева колонке (над которой напечатано «градусы») помещены числа градусов: 1, 2, 3, . . . до 45; во второй колонке (над которой напечатано «синусы») выставлены величины синусов, соответствующих углам, указанным в первой колонке; в третьей колонке помещены величины косинусов, затем тангенсов и далее котангенсов. В последней, шестой колонке помещены снова числа градусов, именно: 90°, 89, 88, 87, . . . и т. д. до 45°. Сделано это (ради экономии места) на том основании, что, как мы видели (194), $\sin \alpha = \cos(90° - \alpha)$, $\cos \alpha = \sin(90° - \alpha)$ и т. д.; значит, $\sin 1° = \cos 89°$, $\sin 2° = \cos 88°$ и т. д. Поэтому внизу той колонки, над которой сверху стоит надпись «синусы», напечатано «косинусы», внизу той колонки (третьей слева), над которой помечено «косинусы», стоит «синусы» и т. п. Таким образом, для углов от 1° до 45° надо читать числа градусов в первой колонке слева, а названия тригонометрических функций над колонками; для углов же от 45° до 89° надо числа градусов брать в последней колонке справа, а названия функций читать внизу колонки. Например, из таблицы находим: $\operatorname{tg} 35° = 0{,}70021$, $\cos 53° = 0{,}60182$, $\operatorname{tg} 72° = 3{,}07768$ и т. п.

При помощи такой таблицы мы можем не только находить тригонометрические функции данного угла, но и, наоборот, по данной функ-



Черт. 213

ции неизвестного угла можем находить (приблизительно) этот угол. Пусть, например, требуется найти угол x, зная, что $\sin x = 0{,}61523$. Ищем в колонках синусов число, возможно близкое к 0,61523. Такое число оказывается 0,61566, означающее $\sin 38°$. Так как $0{,}61523 < 0{,}61566$, то $x < 38°$. Но, с другой стороны, $0{,}61523 > 0{,}60182$ (последнее число в таблице стоит над числом 0,61566 и означает $\sin 37°$); поэтому $x > 37°$. Мы нашли таким образом два угла: 37° и 38°, между которыми заключается угол x. Значит, если мы вместо x примем угол в 37° или угол в 38°, то в первом случае найдем приближенную величину с недостатком, а во втором случае — с избытком, в том и другом случае с точностью до 1°. Предпочтительно брать тот из этих двух углов, синус которого менее разнится от данного (в нашем примере лучше взять 38°).

Пусть еще требуется найти угол x по уравнению $\operatorname{ctg} x = 0{,}7826$. В колонках котангенсов находим:

$$0{,}78129 = \operatorname{ctg} 52°; \quad 0{,}80978 = \operatorname{ctg} 51°.$$

Так как $0{,}80978 > 0{,}7826 > 0{,}78129$, то $51° < x < 52°$, причем x ближе к 52° и потому лучше принять $x = 52°$ (с точностью до 1°).

202. Зависимость между сторонами и углами прямоугольного треугольника. 1. Из прямоугольного $\triangle ABC$ находим (черт. 213):

$$\frac{b}{a} = \sin B, \quad \frac{c}{a} = \cos B,$$

откуда

$$b = a \sin B, \quad c = a \cos B.$$

Так как $B = 90° - C$, то $\sin B = \cos C$ и $\cos B = \sin C$; значит, предыдущие равенства можно дополнить так:

$$b = a \sin B = a \cos C, \quad c = a \cos B = a \sin C.$$

Таким образом, **катет прямоугольного треугольника равен его гипотенузе, умноженной на синус угла, противолежащего этому катету, или на косинус угла, прилежащего к нему.**

2. Из того же треугольника находим:

$$\frac{b}{c} = \operatorname{tg} B, \quad \frac{c}{b} = \operatorname{ctg} B,$$

откуда

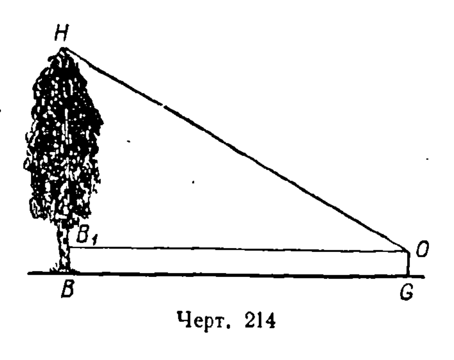
$$b = c \operatorname{tg} B; \quad c = b \operatorname{ctg} B$$

Но $\operatorname{tg} B = \operatorname{ctg}(90° - B) = \operatorname{ctg} C$ и $\operatorname{ctg} B = \operatorname{tg}(90° - B) = \operatorname{tg} C$; поэтому можно написать:

$$b = c \operatorname{tg} B = c \operatorname{ctg} C, \quad c = b \operatorname{ctg} B = b \operatorname{tg} C,$$

т. е. **катет равен другому катету, умноженному на тангенс угла, противолежащего первому катету, или на котангенс угла, прилежащего к нему.**

3. К указанным двум зависимостям надо добавить еще третью, которую мы вывели раньше (182), а именно $a^2=b^2+c^2$, т. е. **квадрат числа, измеряющего гипотенузу, равен сумме квадратов чисел, измеряющих катеты.**



Черт. 214

203. Решение прямоугольных треугольников. Указанные зависимости позволяют нам решать прямоугольные треугольники, т. е. по некоторым данным элементам его вычислять остальные. Приведем примеры.

Задача 1. В прямоугольном треугольнике известны гипотенуза $a=4,5$ и угол $C=42°$. Найти катеты и угол B.

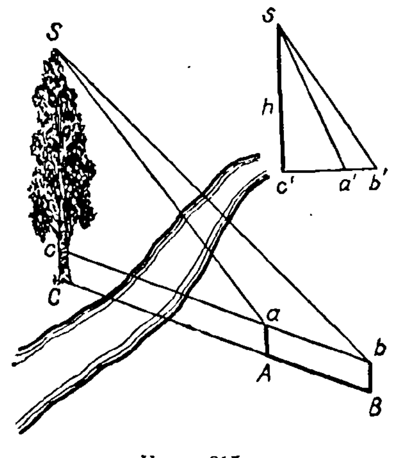
$$b=a\cos C=4,5\cdot\cos 42°,$$
$$c=a\sin C=4,5\cdot\sin 42°.$$

Из таблицы находим (ограничиваясь четырьмя десятичными знаками):

$$\sin 42°=0,6691,\quad \cos 42°=0,7431.$$

Значит,

$$b=4,5\cdot0,7431=3,34395,$$
$$c=4,5\cdot0,6691=3,01095,$$
$$B=90°-C=48°.$$



Черт. 215

Задача 2. Найти высоту предмета, к основанию которого можно подойти.

Положим, требуется найти высоту дерева, к стволу которого можно подойти (черт. 214). Для этого отмерим (по горизонтальному направлению) некоторую длину BG и, поместившись над точкой G, измерим каким-нибудь угломерным снарядом угол HOB_1, составленный с горизонтальной прямой B_1O лучом зрения, направленным из верхней точки дерева к глазу наблюдателя, помещенному в точке O. Тогда в прямоугольном $\triangle HOB_1$ будут известны катет B_1O и острый угол HOB_1. Пользуясь таблицей тригонометрических функций, мы вычислим катет HB_1 по формуле $HB_1=B_1O\cdot\operatorname{tg} HOB_1$. Остается к вычисленному катету приложить высоту B_1B, равную высоте OG, на которой над горизонтальной линией BG расположен глаз наблюдателя.

Задача 3. Найти высоту предмета, к основанию которого нельзя подойти.

Пусть, например, требуется найти высоту дерева, изображенного на черт. 215. Выберем и измерим какой-нибудь отрезок AB, распо-

ложенный на прямой BC, соединяющей точку B с подножием C дерева (эта прямая должна быть предварительно провешена посредством вех, поставленных в точках A и B). Установив затем угломерный прибор в точке A, затем в точке B, измерим углы Sac и Sbc. После этого мы можем вычислить высоту дерева двояким путем.

1. Уменьшив длину $AB=ab$ в некоторое число раз, построим на бумаге $\triangle\, a'b's$ (черт. 215, в правом углу), подобный $\triangle\, abS$, и затем опустим и измерим перпендикуляр $h=c's$. Увеличив длину h в таком отношении, в каком мы ранее уменьшили длину AB, мы найдем высоту Sc (и затем высоту SC).

2. Из прямоугольных треугольников Sbc и Sac находим:

$$bc=Sc \operatorname{ctg} Sbc$$

и

$$ac=Sc\cdot\operatorname{ctg} Sac.$$

Вычтя второе равенство из первого, получим:

$$bc-ac=ab=Sc(\operatorname{ctg} Sbc-\operatorname{ctg} Sac);$$

откуда

$$Sc=\frac{ab}{\operatorname{ctg} Sbc-\operatorname{ctg} Sac}.$$

Пусть, например, $ab=2{,}3$ м, $\angle Sbc=42^\circ$ и $\angle Sac=50^\circ$; тогда, ограничиваясь четырьмя десятичными знаками, находим:

$$\operatorname{ctg} 42^\circ=1{,}1106, \quad \operatorname{ctg} 50^\circ=0{,}8391$$

и

$$Sc=\frac{2{,}3}{1{,}1106-0{,}8391}=\frac{2{,}3}{0{,}2715}=\frac{23\,000}{2715}=8{,}47 \text{ м}.$$

X. ПОНЯТИЕ О ПРИЛОЖЕНИИ АЛГЕБРЫ К ГЕОМЕТРИИ

204. З а д а ч а. Данную конечную прямую разделить в среднем и крайнем отношении.

Эту задачу надо понимать так: разделить данную прямую на такие две части, чтобы бо́льшая из них была средней пропорциональной между всей линией и меньшей ее частью.

Задача будет решена, если мы найдем одну из двух частей, на которые требуется разделить данную прямую. Будем находить большую часть, т. е. ту, которая должна быть с р е д н е й п р о п о р ц и о н а л ь н о й между всей линией и меньшей ее частью. Предположим сначала, что речь идет не о построении этой части, а только об ее в ы ч и с л е н и и. Тогда задача решается а л г е б р а и ч е с к и так: если длину данной прямой обозначим a, а длину большей ее части x, то длина другой части выразится $a-x$, и согласно требованию задачи мы будем иметь пропорцию

$$a:x=x:(a-x),$$

откуда

$$x^2=a(a-x),$$

или

$$x^2+ax-a^2=0.$$

Решив это квадратное уравнение, находим:

$$x_1=-\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2};\quad x_2=-\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}.$$

Отбросив второе решение, как отрицательное, возьмем только положительное решение, которое удобнее представить так:

$$x_1=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}-\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{4a^2}{4}}-\frac{a}{2}=$$

$$=\sqrt{\frac{5a^2}{4}}-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}\sqrt{5}-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)=\frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}=a\cdot 0{,}61803.$$

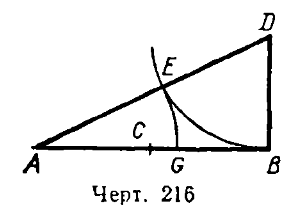
Таким образом, задача всегда в о з м о ж н а и имеет только о д н о р е ш е н и е.

Если бы нам удалось построить такую прямую, длина которой численно выражается найденной выше формулой, то, нанеся эту длину на данную прямую, мы разделили бы ее в среднем и крайнем отношении. Итак, вопрос сводится к построению найденной формулы. Построить эту формулу всего удобнее, если мы ее возьмем в том виде, в каком она была до упрощения, т. е. возьмем:

$$x_1=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}-\frac{a}{2}.$$

Рассматривая отдельно выражение $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}$, мы замечаем, что оно представляет собой длину гипотенузы такого прямоугольного треугольника, у которого один катет равен a, а другой $\frac{a}{2}$. Построив такой треугольник, мы найдем прямую, выражаемую формулой $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}$. Чтобы получить затем длину x_1, достаточно из гипотенузы построенного треугольника вычесть $\frac{a}{2}$. Таким образом, построение можно выполнить так:

делим (черт. 216) данный отрезок $AB=a$ пополам в точке C. Из конца B восставляем перпендикуляр и откладываем на нем $BD=BC$. Соединив A с D прямой, получим прямоугольный $\triangle\ ABD$, у которого катет $AB=a$, а другой катет $BD=\frac{a}{2}$. Следовательно, его гипотенуза AD равна $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}$. Чтобы вычесть из гипотенузы длину $\frac{a}{2}$, опишем из D как из центра дугу радиусом $BD=\frac{a}{2}$. Тогда отрезок AE будет равен $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}-\frac{a}{2}$, т. е.



Черт. 216

будет равен x_1. Отложив AE на AB (от A до G), получим точку G, в которой отрезок AB делится в среднем и крайнем отношении [1].

205. Алгебраический способ решения геометрических задач. Мы решили предложенную задачу путем приложения алгебры к геометрии. Этот прием состоит в следующем: сперва определяют, какую прямую должно отыскать, чтобы можно было решить задачу. Затем, обозначив численные величины данных прямых буквами a, b, c, . . ., а искомой прямой — буквой x, составляют из условий задачи и известных теорем уравнение, связывающее искомую прямую с данными, и полученное уравнение решают по правилам алгебры. Найденную формулу исследуют, т. е. определяют, при всяких ли заданиях эта формула дает возможные решения или только при некоторых и получается ли одно решение или несколько. Затем строят формулу, т. е. находят построением такую прямую, численная величина которой выражается этой формулой.

Таким образом, алгебраический прием решения геометрических задач состоит в общем из следующих четырех частей: 1) составление уравнения, 2) решение его, 3) исследование полученной формулы и 4) построение ее.

Иногда задача приводится к отысканию нескольких прямых линий. Тогда, обозначив численные величины их буквами x, y, . . ., стремятся составить столько уравнений, сколько неизвестных.

206. Построение простейших формул. Укажем простейшие формулы, которые можно построить посредством циркуля и линейки; при этом будем предполагать, что буквы a, b, c, . . . означают величины данных прямых, а x — величину искомой. Не останавливаясь на таких формулах:

$$x=a+b+c, \quad x=a-b, \quad x=2a, \ 3a, \ \dots,$$

построение которых выполняется весьма просто, перейдем к более сложным:

1. Формулы $x=\frac{a}{2}$, $\frac{a}{3}$, ..., $x=\frac{2}{3}a$ и т. п. строятся посредством деления прямой a на равные части (63, 7; 103) и затем, если нужно, повторением одной части слагаемым 2, 3, . . . и т. д. раза.

2. Формула $x=\frac{ab}{c}$ представляет собой четвертую пропорциональную к прямым c, a и b. Действительно, из этого равенства выводим:

$$cx=ab, \quad \text{откуда} \quad c:a=b:x.$$

Следовательно, x найдется способом, указанным нами для построения четвертой пропорциональной (175).

3. Формула $x=\frac{a^2}{c}$ выражает четвертую пропорциональную к

---

[1] Деление отрезка в среднем и крайнем отношении известно было у древних под названием *золотого сечения*. О роли этого деления в искусстве и природе см., например, в книге: Игнатьев Е. И. В царстве смекалки, т. 2, с. 238.

прямым b, a и a, или, как говорят, третью пропорциональную к прямым b и a. Действительно, из данного равенства выводим:

$$bx=a^2, \quad \text{откуда} \quad b:a=a:x.$$

Следовательно, x найдется тем же способом, каким отыскивается четвертая пропорциональная (только прямую a придется откладывать 2 раза).

4. Формула $x=\sqrt{ab}$ выражает среднюю пропорциональную между a и b. Действительно, из нее выводим:

$$x^2=ab, \quad \text{откуда} \quad a:x=x:b.$$

Следовательно, x найдется способом, указанным раньше для построения средней пропорциональной (181).

5. Формула $x=\sqrt{a^2+b^2}$ выражает гипотенузу прямоугольного треугольника, у которого катеты суть a и b.

6. Формула $x=\sqrt{a^2-b^2}$ представляет катет прямоугольного треугольника, у которого гипотенуза есть a, другой катет b.

Построение всего удобнее выполнить так, как указано в § 131.

Указанные формулы можно считать основными. При помощи их строятся более сложные формулы. Например:

7. $x=a\sqrt{\frac{2}{3}}$. Подведя a под знак радикала, получим:

$$x=\sqrt{\frac{2}{3}a^2}=\sqrt{a\cdot\frac{2}{3}a}.$$

Отсюда видно, что x есть средняя пропорциональная между прямыми a и $\frac{2}{3}a$.

8. $x=\sqrt{a^2+b^2-c^2+d^2}$. Положим, что $a^2+b^2=k^2$. Тогда k найдется как гипотенуза прямоугольного треугольника, у которого катеты суть a и b. Построив k, положим, что $k^2+d^2=l^2$. Тогда l найдется как гипотенуза прямоугольного треугольника, у которого катеты суть k и d. Построив l, будем иметь: $x=\sqrt{l^2-c^2}$. Следовательно, x есть катет такого треугольника, у которого гипотенуза l, а другой катет c.

Ограничимся этими примерами. Заметим, что подробное рассмотрение способов построения алгебраических формул приводит к следующему важному выводу:

с помощью линейки и циркуля возможно строить только такие алгебраические выражения, которые или вовсе не содержат радикалов, или же содержат только радикалы с показателями 2, 4, 8, . . ., т. е. с показателями, равными степени 2—*x*.

УПРАЖНЕНИЯ

Доказать теоремы

243. Прямая, проведенная через середины оснований трапеции, проходит через точку пересечения непараллельных сторон и через точку пересечения диагоналей.

244. Если в треугольнике из вершины угла лежащего между неравными сторонами, проведены биссектриса и медиана, то первая меньше второй.

245. Прямая, проходящая через середину основания равнобедренного треугольника и ограниченная одной боковой стороной и продолжением другой боковой стороны, больше основания этого треугольника.

246. Если два круга касаются извне, то часть внешней общей касательной, ограниченная точками касания, есть средняя пропорциональная между диаметрами кругов.

247. Если на сторонах угла отложим от вершины пропорциональные части, то прямые, соединяющие соответственные концы их, параллельны (теорема, обратная § 173).

248. Две параллельные, пересекаемые рядом прямых, исходящих из одной точки, рассекаются ими на пропорциональные части.

249. Если в прямоугольный треугольник ABC вписать квадрат $DEFG$ так, чтобы сторона DE лежала на гипотенузе BC, то эта сторона есть средняя пропорциональная между отрезками гипотенузы BD и EC.

250. Если две конечные прямые AB и CD пересекаются (хотя бы и при продолжении) в точке E так, что $EB \cdot EA = EC \cdot ED$, то точки A, B, C и D лежат на одной окружности (эта теорема, обратная изложенным в § 190 и 192).

251. Дана окружность O и две точки A и B вне круга. Через эти точки проведено несколько окружностей, пересекающих окружность O или касающихся ее. Доказать, что все хорды, соединяющие точки пересечения каждой из этих окружностей с окружностью O, а также и общие касательные сходятся (при продолжении) в одной точке, лежащей на продолжении AB.

252. Основываясь на этом, вывести способ построения такой окружности, которая проходит через две данные точки A и B и касается данной окружности O.

253. Даны два каких-нибудь круга на плоскости. Если два радиуса этих кругов движутся, оставаясь постоянно параллельными, то прямая, проходящая через концы их, пересекает линию центров всегда в одной и той же точке (в ц е н т р е п о д о б и я двух кругов).

254. Медиана треугольника делит пополам все прямые, проведенные внутри треугольника параллельно той стороне, относительно которой взята медиана.

255. Даны три прямые, исходящие из одной точки. Если по одной из них движется какая-нибудь точка, то расстояния ее от двух других прямых сохраняют всегда одно и то же отношение.

256. Если две окружности концентрические, то сумма квадратов расстояний всякой точки одной из них от концов какого угодно диаметра другой есть величина постоянная (§ 188).

257. Если из трех вершин треугольника и из точки пересечения его медиан опустим перпендикуляры на какую-нибудь внешнюю прямую, то последний из четырех перпендикуляров равен третьей части суммы первых трех.

258. Если соединим прямыми основания трех высот какого-нибудь треугольника, то образовавшиеся при этом три треугольника у вершин данного подобны ему. Вывести отсюда, что для треугольника, имеющего сторонами прямые, соединяющие основания высот данного треугольника, эти высоты служат биссектрисами.

259. Диаметр AB данной окружности продолжен за точку B. Через какую-нибудь точку C этого продолжения проведена неопределенная прямая $CD \perp AB$. Если произвольную точку M этого перпендикуляра соединим с A, то (обозначив через A_1 вторую точку пересечения с окружностью этой прямой) произведение $AM \cdot AA_1$ есть величина постоянная для всякой точки M.

260. Произведение двух сторон треугольника равно произведению диаметра круга, описанного около этого треугольника, на высоту его, опущенную на третью сторону.

261. Произведение двух сторон треугольника равно квадрату биссектрисы угла, заключенного между этими сторонами, сложенному с произведением отрезков, на которые биссектриса делит третью сторону.

Найти геометрические места

262. Середин всех хорд, проходящих через данную точку окружности.

263. Точек, делящих в одном и том же отношении $m : n$ все хорды, проходящие через данную точку окружности.

264. Точек, расстояния которых от сторон данного угла имеют одно и то же отношение $m : n$.

265. Точек, для которых сумма квадратов расстояний от двух данных точек есть величина постоянная (§ 188).

266. Точек, для которых разность квадратов расстояний от двух данных точек есть величина постоянная.

267. Точек, из которых касательные, проведенные к двум данным окружностям, равны (это геометрическое место есть прямая, перпендикулярная к линии центров; она называется *радикальной осью* двух кругов).

268. Точек, делящих в данном отношении $m : n$ все прямые, соединяющие точки окружности с данной точкой A (лежащей вне или внутри круга).

269. Даны две извне касающиеся окружности. Через точку касания A проводят в окружностях две перпендикулярные хорды AB и AC. Концы их B и C соединяют прямой. Найти геометрическое место точек, делящих BC в данном отношении $m : n$.

270. Данный угол вращается вокруг своей вершины. На сторонах его, от вершины, откладывают переменные длины, но которых отношение постоянно. Если конец одной стороны описывает данную по положению прямую, то какую линию опишет другой конец?

Задачи на построение

271. Через точку, данную внутри или вне угла, провести прямую так, чтобы части ее, заключенные между этой точкой и сторонами угла, имели данное отношение $m : n$.

272. Найти в треугольнике такую точку, чтобы перпендикуляры, опущенные из нее на стороны, находились в данном отношении $m : n : p$ (см. упр. 264).

273. Построить треугольник по углу, одной из сторон, прилежащих к нему, и по отношению этой стороны к третьей стороне. (Сколько решений?)

274. То же — по углу при вершине, основанию и отношению его к одной из боковых сторон.

275. То же — по высоте, углу при вершине и отношению отрезков основания.

276. То же — по углу при вершине, основанию и данной на основании точке, через которую проходит биссектриса угла при вершине.

277. То же — по двум углам и сумме или разности основания с высотой.

278. Построить равнобедренный треугольник по углу при вершине и сумме основания с высотой.

279. На бесконечной прямой MN даны две точки A и B. Найти на этой прямой третью точку C, чтобы $CA : CB = m : n$, где m и n — данные отрезки прямой или данные числа (если $m \gtrless n$, то таких точек существует две: одна между A и B, другая вне отрезка AB).

280. Вписать в данный круг треугольник, у которого даны основание и отношение двух других сторон.

281. Вписать в данный круг треугольник, у которого даны основание и медиана относительно одной из известных сторон (см. упр. 262).

282. Вписать квадрат в данный сегмент так, чтобы одна его сторона лежала на хорде, а вершины противолежащих углов — на дуге.

283. Вписать квадрат в данный треугольник так, чтобы одна сторона его лежала на основании треугольника, а вершины противолежащих углов — на боковых сторонах треугольника.

284. В данный треугольник вписать прямоугольник (см. предыдущую задачу), у которого стороны относились бы как $m : n$.

285. Около данного квадрата описать треугольник, подобный данному.

286. Дана окружность и на ней две точки A и B. Найти на этой окружности третью точку C, чтобы расстояния ее от A и B находились в данном отношении.

287. На данной прямой найти точку, которая одинаково была бы удалена от другой данной прямой и данной точки.

288. Построить треугольник по двум сторонам и биссектрисе угла между ними (см. черт. 191; сначала находим прямую CE из пропорции $CE : BD = AE : AB$; затем строим $\triangle BCE$ . . .).

289. Построить прямую x, которая относилась бы к данной прямой m как $a^2 : b^2$ (a и b — данные прямые).

290. Найти вне данного круга такую точку, чтобы касательная, проведенная из нее к этой окружности, была вдвое менее секущей, проведенной из той же точки через центр (приложением алгебры к геометрии).

291. Через данную вне круга точку провести такую секущую, которая разделилась бы этой окружностью в данном отношении (приложением алгебры к геометрии).

292. Построить треугольник по трем его высотам h_1, h_2 и h_3.

Указание. Предварительно из подобия прямоугольных треугольников надо доказать, что высоты обратно пропорциональны соответствующим сторонам. Если стороны, на которые опущены высоты h_1, h_2 и h_3, обозначим соответственно через x_1, x_2, и x_3, то

$$x_1 : x_2 = h_2 : h_1.$$

$$x_2 : x_3 = h_3 : h_2 = 1 : \frac{h_2}{h_3} = h_1 : \frac{h_1 h_2}{h_3},$$

откуда

$$x_1 : x_2 : x_3 = h_2 : h_1 : \frac{h_1 h_2}{h_3}.$$

Выражение $\frac{h_1 h_2}{h_3}$ есть четвертая пропорциональная к h_3, h_2 и h_1. Построив ее (пусть это будет k), мы будем иметь три прямые: h_2, h_1 и k, которым искомые стороны пропорциональны; значит, треугольник, имеющий эти прямые сторонами, подобен искомому, и потому вопрос приводится к построению такого треугольника, который, будучи подобен данному, имел бы данную высоту. Задача окажется невозможной, если по трем прямым h_1, h_2 и k нельзя построить треугольник (45).

293. Построить прямые, выражаемые формулами:

$$1)\ x = \frac{abc}{de} = \frac{ab}{d} \cdot \frac{c}{e}$$

(придется 2 раза построить четвертую пропорциональную);

$$2)\ x = \sqrt{a^2 + bc}$$

(предварительно построить прямую $k = \sqrt{bc}$, потом $x = \sqrt{a^2 + k^2}$).

Задачи на вычисление

294. По данному основанию a и высоте h остроугольного треугольника вычислить сторону x квадрата, вписанного в этот треугольник так, чтобы одна сторона квадрата лежала на основании треугольника, а две вершины квадрата — на боковых сторонах треугольника.

295. Стороны треугольника суть 10 м, 12 м и 17 м. Вычислить отрезки стороны, равной 17 м, на которые она делится биссектрисой противолежащего угла.

296. Перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, делит ее на два отрезка m и n. Вычислить катеты.

297. По трем сторонам a, b и c треугольника вычислить высоту h, опущенную на сторону a. (Указание. Воспользоваться теоремой § 185.)

298. По трем сторонам a, b и c треугольника ABC вычислить медиану AD, проведенную к стороне BC. (Указание. Продолжив AD на расстояние $DE = AD$ и соединив точку E с B и C, получим параллелограмм, к которому применим теорему § 188.)

299. В треугольнике ABC стороны равны: $AB = 7$, $BC = 15$ и $AC = 10$. Определить, какого вида угол A, и вычислить высоту, опущенную из вершины B.

300. Из точки вне круга проведены касательная a и секущая. Вычислить длину секущей, зная, что отношение внешней ее части к внутренней равно $m : n$.

301. К двум кругам, радиусы которых суть R и r, а расстояние между центрами d, проведена общая касательная. Определить вычислением положение точки пересечения этой касательной с линией центров, во-первых, когда эта точка лежит по одну сторону от центров, во-вторых, когда она расположена между ними.

Решить с помощью тригонометрических функций следующие задачи

302. Хорда в 28 см отстоит от центра на 20 см. Найти число градусов, заключающееся в стягиваемой хордой дуге.

303. Тень от вертикально стоящего шеста, высота которого равна 7 м, составляет 4 м. Выразить в градусах высоту солнца над горизонтом.

304. Из точки, отстоящей на 7 м от окружности радиуса 5 м, проведены касательные. Вычислить их длину и угол между ними.

305. Диагонали ромба равны 4,73 и 2,94. Вычислить его углы.

306. Стороны прямоугольника равны: $a=12,4$ и $b=26$. Найти угол между диагоналями.

307. Высота равнобедренного треугольника равна 12,4 м, а основание 40,6 м. Вычислить углы и бок.

308. Отношение катетов m и n равно 38 : 56. Вычислить углы.

309. Сторона ромба $a=241$ м, высота 120 м. Вычислить углы.

ОТДЕЛ ЧЕТВЕРТЫЙ

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ И ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЛИНЫ ОКРУЖНОСТИ

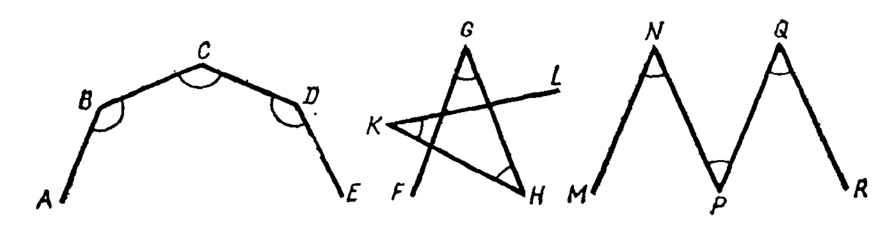
I. ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

207. Определения. Ломаная линия называется *правильной*, если она удовлетворяет следующим трем условиям: 1) отрезки прямых, составляющие ее, равны: 2) углы, составленные каждыми двумя соседними отрезками, равны и 3) из каждых трех последовательных отрезков первый и третий расположены по одну сторону от второго.

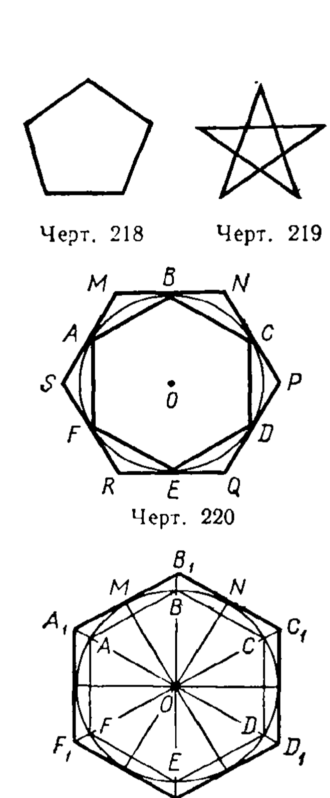
Таковы, например, линии $ABCDE$ и $FGHKL$ (черт. 217); но ломаную $MNPQR$ нельзя назвать правильной, потому что она не удовлетворяет третьему условию.

Правильная ломаная может быть в ы п у к л о й (30), как, например, линия $ABCDE$.

Многоугольник называется *правильным*, если он ограничен правильной ломаной линией, т. е. если он имеет равные стороны и равные углы. Таковы, например, квадрат, равносторонний треугольник и многие другие.



Черт. 217



Черт. 218 Черт. 219

Черт. 220

Черт. 221

Многоугольник, изображенный на черт. 218, есть выпуклый правильный пятиугольник; многоугольник на черт. 219 также правильный пятиугольник, но не выпуклый (так называемый *звездчатый*). В нашем курсе геометрии мы будем рассматривать только выпуклые правильные многоугольники, и поэтому, когда мы скажем «правильный многоугольник», мы будем подразумевать слово «выпуклый».

Последующие теоремы показывают, что построение правильных многоугольников тесно связано с разделением окружности на равные части.

208. Теорема. Если окружность разделена на некоторое число равных частей (большее двух), то:

1) соединив хордами каждые две соседние точки деления, получим правильный многоугольник (вписанный);

2) проведя через все точки деления касательные до взаимного пересечения, получим правильный многоугольник (описанный).

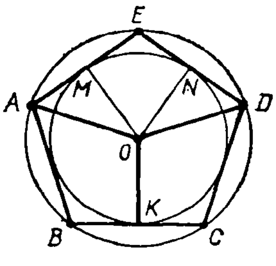
Пусть окружность (черт. 220) разделена на несколько равных частей в точках A, B, C, . . . и через эти точки проведены хорды AB, BC, . . . и касательные MN, NP, ... Тогда:

1) вписанный многоугольник $ABCDEF$ правильный, потому что все его стороны равны (как хорды, стягивающие равные дуги) и все углы равны (как вписанные, опирающиеся на равные дуги);

2) чтобы доказать правильность описанного многоугольника, рассмотрим треугольники AMB, BNC и т. д. У них основания AB, BC и т. д. равны; углы, прилежащие к этим основаниям, также равны, потому что каждый из них имеет одинаковую меру (угол, составленный касательной и хордой, измеряется половиной дуги, заключенной внутри его). Значит, все эти треугольники равнобедренные и равны между собой, а потому $MN = NP$ . . . и $M = N =$ . . . , т. е. многоугольник $MNPQRS$ правильный.

209. Замечание. Если из центра O (черт. 221) опустим на хорды AB, BC, . . . перпендикуляры и продолжим их до пересечения с окружностью в точках M, N, . . ., то эти точки разделят все дуги и хорды пополам и тем самым разделят окружность на равные части. Поэтому если через точки M, N, . . . проведем касательные до взаимного пересечения, то получим также правильный описанный многоугольник, стороны которого будут параллельны сторонам вписанного многоугольника. Каждая пара вершин A и A_1, B и B_1, . . . лежит на одной

прямой с центром, а именно на биссектрисе угла MON и других таких же углов.



Черт. 222

210. Теорема. **Если многоугольник правильный, то:**

1) **около него можно описать окружность;**

2) **в него можно вписать окружность.**

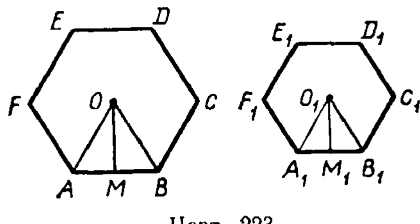
1) Проведем окружность через какие-нибудь три соседние вершины A, B и C (черт. 222) правильного многоугольника $ABCDE$ (107) и докажем, что она пройдет через следующую четвертую вершину D. Опустим из центра O перпендикуляр OK на хорду BC и соединим O с A и D. Повернем четырехугольник $ABKO$ вокруг стороны OK так, чтобы он упал на четырехугольник $ODCK$. Тогда KB пойдет по KC (вследствие равенства прямых углов при точке K), точка B упадет в C (так как хорда BC делится в точке K пополам), сторона BA пойдет по CD (вследствие равенства углов B и C) и, наконец, точка A упадет в D (вследствие равенства сторон BA и CD). Из этого следует, что OA совместится с OD и, значит, точки A и D одинаково удалены от центра; поэтому вершина D должна лежать на окружности, проходящей через A, B и C. Точно так же докажем, что эта окружность, проходя через три соседние вершины B, C и D, пройдет через следующую вершину E и т. д.; значит, она пройдет через все вершины многоугольника.

2) Из доказанного следует, что стороны правильного многоугольника всегда можно рассматривать как равные хорды одной окружности; но такие хорды одинаково удалены от центра; значит, все перпендикуляры OM, ON, . . ., опущенные из O на стороны многоугольника, равны между собой и потому окружность, описанная радиусом OM из центра O, будет вписанной в многоугольник $ABCDE$.

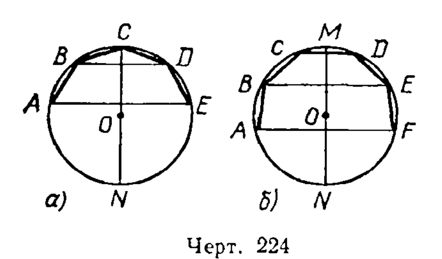
211. Следствие. Из предыдущего видно, что две окружности: описанная около правильного многоугольника и вписанная в него — имеют один и тот же центр. Так как этот общий центр одинаково удален от всех вершин многоугольника, то он должен лежать на перпендикуляре, восставленном к любой стороне из ее середины, а будучи одинаково удален от сторон каждого угла, он должен находиться на его биссектрисе. Поэтому, чтобы найти центр окружности, описанной около правильного многоугольника или вписанной в него, достаточно определить точку пересечения двух перпендикуляров, восставленных к сторонам многоугольника из их середин, или двух биссектрис углов, или одного такого перпендикуляра с биссектрисой.

212. Определения. Общий центр окружностей, описанной около правильного многоугольника и вписанной в него, называется *центром* этого многоугольника, радиус описанной окружности называется *радиусом* многоугольника, а радиус вписанной окружности — *апофемой* его.

Угол, составленный двумя радиусами, проведенными к концам какой-нибудь стороны правильного многоугольника, называется *центральным углом*. Таких углов в многоугольнике столько,



Черт. 223



Черт. 224

сколько сторон; все они равны, как измеряющиеся равными дугами.

Так как сумма всех центральных углов равна $4d$, или $360°$, то каждый из них равен $4d : n$, или $360° : n$, если n означает число сторон многоугольника; так, центральный угол правильного 6-угольника равен $360 : 6 = 60°$; правильного 8-угольника равен $360 : 8 = 45°$ и т. п.

213. Т е о р е м а. **Правильные одноименные многоугольники подобны и стороны их относятся как радиусы или апофемы.**

Чтобы доказать подобие (черт. 223) правильных одноименных многоугольников $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, достаточно обнаружить, что у них углы равны и стороны пропорциональны.

Углы многоугольников равны, так как каждый из них содержит одно и то же число градусов, а именно $\frac{180(n-2)}{n}$ (79), если n означает число сторон каждого многоугольника. Так как $AB = BC = CD = \ldots$ и $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = \ldots$, то очевидно, что

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \ldots,$$

т. е. у таких многоугольников стороны пропорциональны.

Пусть O и O_1 (черт. 223) будут центры данных многоугольников, OA и O_1A_1— их радиусы, OM и O_1M_1— апофемы. Треугольники OAB и $O_1A_1B_1$ подобны, так как углы одного соответственно равны углам другого. Из подобия их следует (159):

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{OA}{O_1A_1} = \frac{OM}{O_1M_1}.$$

214. С л е д с т в и е. Так как периметры подобных многоугольников относятся как сходственные стороны (166), **то периметры правильных одноименных многоугольников относятся как радиусы или как апофемы.**

215. Симметрия правильных многоугольников. Проведем в описанной окружности через какую-нибудь вершину C правильного многоугольника (черт. 224, a) диаметр CN, который разделит окружность и многоугольник на две части. Вообразим, что одна из этих частей (например, левая) повернута вокруг диаметра CN как около оси настолько, чтобы она упала на другую часть (на правую). Тогда одна полуокружность совместится с другой полуокружностью, дуга CB совместится с дугой CD (по равенству этих дуг), дуга BA совме-

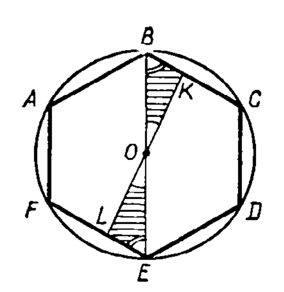
стится с дугой DE (по той же причине) и т. д.; следовательно, хорда BC совпадет с хордой CD, хорда AB — с хордой DE и т. д. Таким образом, **диаметр описанной окружности, проведенный через какую-нибудь вершину правильного многоугольника, служит осью симметрии этого многоугольника** (вследствие чего каждая пара вершин, как B и D, A и E и т. д., лежит на одном перпендикуляре к диаметру CN на равном от него расстоянии).

Проведем еще в описанной окружности диаметр MN (черт. 224, б), перпендикулярный к какой-нибудь стороне CD правильного многоугольника; этот диаметр тоже разделит окружность и многоугольник на две части. Вращая одну из этих частей (левую) вокруг проведенного диаметра до тех пор, пока она упадет на другую часть (правую), мы также убедимся, что одна часть многоугольника совместится с другой частью. Значит, **диаметр описанной окружности, перпендикулярный к стороне правильного многоугольника, служит его осью симметрии** (и, следовательно, каждая пара вершин, как B и E, A и F и т. д., лежит на одном перпендикуляре к диаметру MN на равном от него расстоянии).

Если число сторон многоугольника *четное*, то диаметр, проведенный через любую вершину многоугольника, проходит также и через противоположную вершину, и диаметр, перпендикулярный к любой стороне многоугольника, перпендикулярен также и к противоположной стороне его; если же число сторон *нечетное*, то диаметр, проходящий через любую вершину, перпендикулярен к противоположной стороне, и обратно, диаметр, перпендикулярный к любой стороне, проходит через противоположную вершину. Отсюда следует, что во всяком правильном многоугольнике есть столько осей симметрии, сколько в нем сторон. Например, в правильном шестиугольнике есть 6 осей симметрии, именно: 3 оси, проходящие через вершины, и 3 оси, перпендикулярные к сторонам; в правильном пятиугольнике есть 5 осей симметрии: все они проходят через вершины углов и в то же время перпендикулярны к сторонам.

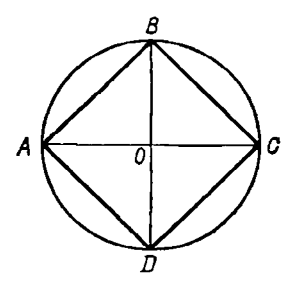
Всякий правильный многоугольник *четного* числа сторон имеет еще *центр симметрии*, совпадающий с центром многоугольника (черт. 225). Действительно, всякая прямая KL, соединяющая две точки контура такого многоугольника и проходящая через центр O, делится этой точкой пополам, как это видно из равенства треугольников OBK и OEL (покрытых на чертеже штрихами).

Вращением правильного многоугольника вокруг его центра симметрии мы можем совместить его с самим собой; например, вращая шестиугольник черт. 225 вокруг O на 60° в сторону движения часовой стрелки, мы заставим сторону AB перейти в BC, сторону BC — в CD и т. д.

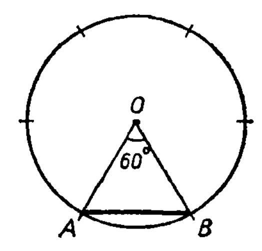


Черт. 225

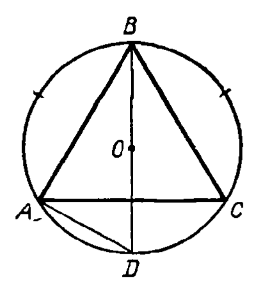
216. *Задача.* Вписать в данный круг *квадрат* и определить его сторону в зависимости от радиуса.



Черт. 226



Черт. 227



Черт. 228

Предположим, что AB (черт. 226) есть сторона квадрата, вписанного в данный круг O. Тогда дуга AB должна равняться $^1/_4$ окружности и угол AOB должен быть прямой. Поэтому для построения вписанного квадрата (и, следовательно, для разделения окружности на четыре равные части) достаточно провести два перпендикулярных диаметра AC и BD и концы их соединить хордами. Вписанный четырехугольник $ABCD$ правильный, потому что дуги AB, BC, CD и DA равны, как соответствующие равным центральным углам.

Из прямоугольного $\triangle AOB$ находим:

$$AB^2=AO^2+BO^2, \text{ т. е. } AB^2=2AO^2,$$

откуда

$$AB=AO\sqrt{2}.$$

Условимся всегда обозначать буквой a_n численную величину стороны правильного вписанного многоугольника, имеющего n сторон, а буквой R радиус описанного круга; тогда выведенное равенство изобразится так:

$$a_4=R\sqrt{2}=R\cdot 1{,}41421\ldots$$

217. Задача. Вписать в данный круг правильный шестиугольник и определить его сторону в зависимости от радиуса.

Предположим, что AB (черт. 227) есть сторона правильного вписанного шестиугольника. Тогда дуга AB должна быть $^1/_6$ частью окружности и, следовательно, угол AOB должен содержать 60°. Так как $\triangle AOB$ равнобедренный ($AO=OB$), то углы A и B равны и каждый из них содержит по $^1/_2$ (180°—60°), т. е. тоже по 60°. Таким образом, $\triangle AOB$ оказывается равноугольным и, следовательно, равносторонним, т. е. $AB=AO=OB$. Итак, **сторона правильного вписанного шестиугольника равна радиусу,** что (по принятому нами обозначению) можно выразить так:

$$a_6=R.$$

Отсюда возникает весьма простой способ построения правильного вписанного шестиугольника (и, следовательно, деления окружности на шесть равных частей): дав циркулю растворение, равное радиусу, откладывают этим растворением по окружности одна за другой равные дуги и точки деления соединяют хордами.

218. Задача. Вписать в данный круг правильный треугольник и определить его сторону в зависимости от радиуса.

1. Чтобы разделить окружность на три равные части (черт. 228), делят ее сначала на шесть равных частей (как указано в предыдущей задаче) и затем соединяют по две части в одну.

2. Для определения стороны AB проведем диаметр BD и хорду AD. $\triangle ABD$ прямоугольный при вершине A; поэтому $AB=\sqrt{BD^2-AD^2}$. Но $BD=2R$ и $AD=R$ (потому что дуга AD есть $^1/_6$ часть окружности и, следовательно, хорда AD есть сторона правильного вписанного шестиугольника); значит,

$$a_3=\sqrt{(2R)^2-R^2}=\sqrt{3R^2}=R\sqrt{3}=R\cdot 1{,}73205.$$

219. Задача. Вписать в данный круг правильный десятиугольник и определить его сторону в зависимости от радиуса

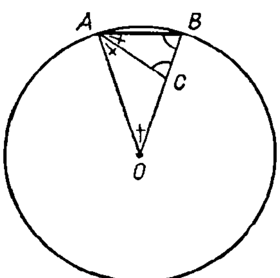
Предварительно докажем одно важное свойство правильного десятиугольника. Пусть хорда AB (черт. 229) есть сторона такого многоугольника. Тогда угол AOB равен 36°, а каждый из углов A и B содержит по $^1/_2(180-36°)$, т. е. по 72°. Разделим угол A пополам прямой AC. Каждый из углов, образовавшихся при точке A, равен 36°; следовательно, $\triangle ACO$, имея два равных угла, есть равнобедренный, т. е. $AC=CO$. $\triangle ABC$ также равнобедренный, потому что $B=72°$ и $C=180°-72°-36°=72°$, следовательно, $AB=AC=CO$. По свойству биссектрисы угла треугольника (176) можно написать:

$$AO : AB=OC : CB. \qquad (1)$$

Заменив AO и AB равными им прямыми OB и OC, получим

$$OB : OC=OC : CB, \qquad (2)$$

т. е. радиус OB разделен в точке C в среднем и крайнем отношении (204), причем OC есть его большая часть. Но CO равна стороне правильного вписанного десятиугольника; значит, **сторона правильного вписанного десятиугольника равна большей части радиуса, разделенного в среднем и крайнем отношении.**



Черт. 229

Теперь задача решается легко:

1. Делят радиус круга (например, OA, черт. 230) в среднем и крайнем отношении (204); затем, дав циркулю растворение, равное большей части радиуса, откладывают им по окружности дуги, одна за другой и точки деления соединяют хордами.

2. Обозначив численную величину стороны правильного вписанного десятиугольника буквой x, мы можем пропорцию (2) переписать так:

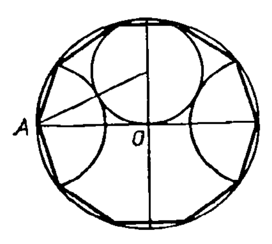
$$R : x=x : (R-x),$$

откуда

$$x^2+Rx-R^2=0.$$

Решив это квадратное уравнение, найдем:

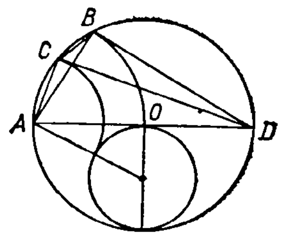
$$x=a_{10}=R\frac{\sqrt{5}-1}{2}=R\cdot 0{,}61803\ldots$$



Черт. 230

220. Замечания. 1. Формулы, выведенные нами в предыдущих задачах для a_4, a_6, a_3, a_{10}, позволяют вычислить радиус описанного

5*



Черт. 231

круга по данной стороне правильного многоугольника. Так, из выражения, определяющего a_{10}, находим:

$$R=\frac{2a_{10}}{\sqrt{5}-1}=\frac{2a_{10}(\sqrt{5}+1)}{5-1}=$$
$$=\frac{1}{2}a_{10}(\sqrt{5}+1)=a_{10}\cdot 1{,}61803\ldots$$

2. Чтобы вписать в данный круг правильный пятиугольник, делят окружность на 10 равных частей (как указано выше) и точки деления соединяют через одну хордами.

221. Задача. Вписать в данный круг правильный пятнадцатиугольник.

Чтобы найти $^1/_{15}$ окружности, достаточно из $^1/_6$ ее части вычесть $^1/_{10}$, как это видно из следующего равенства:

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{5}{30}-\frac{3}{30}=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}.$$

Поэтому если хорда AB (черт. 231) равна радиусу, а хорда AC — большей части радиуса, разделенного в среднем и крайнем отношении, то дуга CB должна быть $^1/_{15}$ окружности, а хорда CB — сторона правильного вписанного 15-угольника.

222. Задача. **Удвоить число сторон правильного вписанного многоугольника.**

В этом сокращенном выражении разумеются собственно две задачи: 1) по данному правильному вписанному многоугольнику построить другой правильный многоугольник, вписанный в ту же окружность, но имеющий вдвое более сторон; 2) вычислить сторону этого многоугольника по данной стороне первого многоугольника и данному радиусу круга.

1. Пусть AB (черт. 232) есть сторона правильного вписанного многоугольника, имеющего n сторон, и O — центр круга. Проведем $OC\perp AB$ и соединим A с C. Дуга AB делится в точке C пополам; следовательно, хорда AC есть сторона правильного вписанного многоугольника, имеющего $2n$ сторон.

2. В $\triangle ACO$ угол O всегда острый (так как дуга ACB всегда меньше полуокружности и, следовательно, половина ее, дуга AC, меньше четверти окружности); поэтому (185)

$$AC^2=OA^2+OC^2-2OC\cdot OD,$$

т. е.

$$a_{2n}^2=R^2+R^2-2R\cdot OD=2R^2-2R\cdot OD.$$

Из прямоугольного $\triangle AOD$ определим катет OD:

$$OD=\sqrt{AO^2-AD^2}=$$
$$=\sqrt{R^2-\left(\frac{a_n}{2}\right)^2}=\sqrt{R^2-\frac{a_n^2}{4}}.$$

Черт. 232

Следовательно, $a_{2n}^2 = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}$.

Такова формула удвоения числа сторон правильного вписанного многоугольника (из нее сторону a_{2n} получим посредством извлечения квадратного корня).

Пример. Вычислим сторону правильного вписанного 12-угольника, причем для простоты примем $R=1$ (следовательно, $a=1$):

$$a_{12}^2 = 2-2\sqrt{1-\frac{1}{4}} = 2-2\sqrt{\frac{3}{4}} = 2-\sqrt{3}.$$

Откуда

$$a_{12} = \sqrt{2-\sqrt{3}} = 0{,}517\ldots$$

Так как стороны правильных одноименных многоугольников пропорциональны их радиусам (213), то при радиусе, равном не 1, а какому-нибудь числу R, для стороны правильного 12-угольника получим такую формулу:

$$a_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}} = R\cdot 0{,}517\ldots$$

223. Задача. Вычислить сторону (AB, черт. 233) правильного многоугольника, зная число n его сторон и радиус круга R.

Опустив из центра O перпендикуляр на хорду AB, мы разобьем ее и угол AOB пополам. Из прямоугольного $\triangle AOC$ найдем:

$$AC = AO\cdot \sin AOC = R\sin\frac{\alpha}{2}.$$

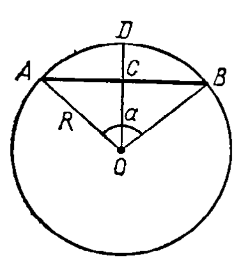
Значит,

$$AB = 2AC = 2R\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Мы видим таким образом, что **хорда равна удвоенному произведению радиуса на синус половины центрального угла, опирающегося на эту хорду.**

Если эта хорда есть сторона правильного вписанного n-угольника, то центральный угол α равен $\frac{360°}{n}$ и половина этого угла будет $\frac{180°}{n}$. Значит, тогда (обозначая AB через a_n)

$$a_n = 2R\sin\frac{180°}{n}.$$



Черт. 233

Например, сторона правильного вписанного 9-угольника равна:

$$a_9 = 2R\sin 20°.$$

Из таблицы тригонометрических функций находим:

$$\sin 20° = 0{,}34202;$$

следовательно,

$$a_9 = 2R \cdot 0{,}34202 = R \cdot 0{,}68404.$$

Подобно этому, пользуясь формулами, выведенными нами прежде (199) для $\sin 45°$, $\sin 30°$ и $\sin 60°$, найдем:

$$a_4 = 2R \sin 45° = 2R \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} = R \sqrt{2};$$

$$a_6 = 2R \sin 30° = 2R \cdot \frac{1}{2} = R;$$

$$a_3 = 2R \sin 60° = 2R \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} = R\sqrt{3},$$

т. е. мы получим те же формулы, которые нашли ранее иным путем.

224. На сколько равных частей можно делить окружность с помощью циркуля и линейки? Применяя указанные в предыдущих задачах способы, мы можем с помощью циркуля и линейки делить окружность на такое число равных частей (и, следовательно, вписывать в окружность правильные многоугольники с таким числом сторон), которое заключается в следующих рядах:

3,	$3 \cdot 2$,	$3 \cdot 2 \cdot 2$ ...	вообще $3 \cdot 2^n$;
4,	$4 \cdot 2$,	$4 \cdot 2 \cdot 2$ ...	вообще 2^n;
5,	$5 \cdot 2$,	$5 \cdot 2 \cdot 2$ ...	вообще $5 \cdot 2^n$;
15,	$15 \cdot 2$,	$15 \cdot 2 \cdot 2$ ...	вообще $3 \cdot 5 \cdot 2^n$.

Германский математик Гаусс (умерший в 1755 г.) доказал, что посредством циркуля и линейки можно делить окружность на такое число равных частей, которое, будучи простым, выражается формулой 2^n+1. Например, можно разделить окружность на 17 равных частей и на 257 равных частей, так как 17 и 257 суть простые числа вида 2^n+1 $(17=2^4+1,\ 257=2^8+1)$. Доказательство Гаусса выходит из пределов элементарной математики.

Доказано также, что с помощью линейки и циркуля окружность можно делить на такое составное число равных частей, в состав которого не входят никакие иные простые множители, кроме: 1) множителей вида 2^n+1 и 2) множителя 2 в какой угодно степени. Например, в окружность с помощью циркуля и линейки можно вписать правильный 170-угольник $(170=2 \cdot 5 \cdot 17)$.

На всякое иное число равных частей окружность может быть разделена только приближенно. Пусть, например, требуется разделить окружность на семь равных частей (или вписать правильный семиугольник). Тогда предварительно вычислим величину центрального угла; он равен $\frac{360°}{7} = 51^3/_7°$. Построить точно такой угол мы не можем, но по транспортиру приблизительно мы можем отложить при центре угол в 51° и тогда получим приблизительно $^1/_7$ часть окружности.

УПРАЖНЕНИЯ

310. Составить формулу для стороны правильного вписанного 24-угольника.

311. Составить формулы для сторон правильных вписанных 8-угольников и 16-угольников.

312. Составить формулы для сторон правильных описанных треугольников и 6-угольников.

313. Пусть AB, BC и CD будут три последовательные стороны правильного многоугольника, имеющего центр в O. Если продолжим стороны AB и CD до взаимного пересечения в точке E, то четырехугольник $OAEC$ может быть вписан в окружность.

314. Доказать, что: 1) всякий вписанный равносторонний многоугольник есть правильный; 2) равноугольный вписанный многоугольник есть правильный, когда число сторон его нечетное; 3) всякий описанный равноугольный многоугольник есть правильный; 4) описанный равносторонний многоугольник есть правильный, когда число сторон его нечетное.

315. Доказать, что две диагонали правильного 5-угольника, не исходящие из одной вершины, пересекаются в среднем и крайнем отношении.

316. На данной стороне построить правильный 8-угольник.

317. На данной стороне построить правильный 10-угольник.

318. Срезать от данного квадрата углы так, чтобы образовался правильный 8-угольник.

319. В данный квадрат вписать равносторонний треугольник, помещая одну из его вершин или в вершине квадрата, или в середине какой-либо стороны.

320. Вписать в равносторонний треугольник другой равносторонний треугольник, стороны которого были бы перпендикулярны к сторонам данного.

321. Построить углы: в 18, в 30, в 75, в 72 градуса.

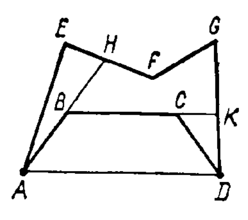
322. Вычислить угол и сторону правильного 17-угольника (см. § 223). Есть ли у этого многоугольника две параллельные стороны? Вычислить наименьший угол, образованный продолжениями каких-нибудь двух сторон этого многоугольника.

323. Около окружности описан какой-нибудь правильный многоугольник. Пользуясь им, вписать в эту окружность правильный многоугольник, имеющий вдвое более сторон, чем описанный.

II. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЛИНЫ ОКРУЖНОСТИ И ЕЕ ЧАСТЕЙ

225. Предварительное разъяснение. Конечную прямую можно сравнить с другой конечной прямой, принятой за единицу, вследствие того, что прямые линии при наложении совмещаются. Действительно, только по этой причине мы можем установить, какие отрезки прямых считать равными и неравными; что такое сумма отрезков прямой; какой отрезок более другого в 2, 3, 4, . . . раза и т. п. Точно так же дуги окружностей одинакового радиуса можно сравнивать между собой вследствие того, что такие дуги при наложении совмещаются. Но так как никакая часть окружности (или другой кривой) не может совместиться с прямой, то нельзя установить путем наложения, какой криволинейный отрезок должно считать равным данному прямолинейному отрезку, а следовательно, и то, какой криволинейный отрезок больше данного прямолинейного в 2, 3, 4, . . . раза. Таким образом, является необходимость определить, что мы разумеем под длиной окружности (или части ее), когда сравниваем ее с прямолинейным отрезком, например с радиусом.

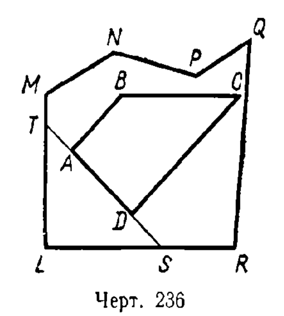
Для этой цели мы предварительно докажем следующие вспомогательные истины.



Черт. 234



Черт. 235



Черт. 236

226. Лемма 1. **Выпуклая ломаная** ($ABCD$, черт. 234) **короче всякой другой ломаной** ($AEFGD$), **объемлющей первую.**

Выражения «объемлющая ломаная», «объемлемая ломаная» имеют следующий смысл. Пусть две ломаные (как те, которые изображены у нас на чертеже) имеют одни и те же концы A и D и расположены таким образом, что одна ломаная ($ABCD$) вся лежит внутри многоугольника, образованного другой ломаной с отрезком AD, соединяющим концы A и D; тогда внешняя ломаная называется объемлющей, а внутренняя ломаная — объемлемой.

Предстоит доказать, что объемлемая ломаная $ABCD$ (если она выпуклая) короче всякой объемлющей линии $AEFGD$ (все равно — выпуклой или невыпуклой), т. е. что

$$AB+BC+CD<AE+EF+FG+GD.$$

Продолжим стороны выпуклой ломаной так, как указано на чертеже. Тогда, приняв во внимание, что отрезок прямой короче всякой ломаной, проведенной между концами отрезка (46), мы можем написать следующие неравенства:

$$AB+BH<AE+EH,$$
$$BC+CK<BH+HF+FG+GK,$$
$$CD<CK+KD.$$

Сложим почленно все эти неравенства и затем от обеих частей полученного неравенства отнимем вспомогательные отрезки BH и CK; далее заменим сумму $EH+HF$ отрезком EF и сумму $GK+KD$ отрезком GD; тогда получим то неравенство, которое требовалось доказать.

Замечание. Если бы объемлемая линия не была выпуклой (черт. 235), то изложенное доказательство нельзя было бы применить. В этом случае объемлемая ломаная может оказаться и длиннее объемлющей.

227. Лемма 2. **Периметр выпуклого многоугольника** ($ABCD$) **меньше периметра всякого другого многоугольника** ($MNPQRL$), **объемлющего первый** (черт. 236).

Требуется доказать, что $AB+BC+CD+DA$ меньше

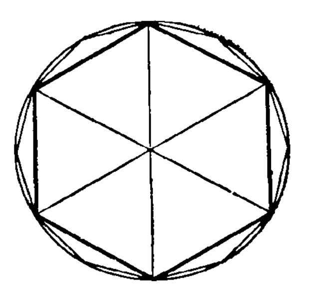
$$LM+MN+NP+PQ+QR+RL.$$

Продолжив в обоих направлениях одну какую-нибудь сторону AD выпуклого многоугольника, применим к ломаным линиям $ABCD$ и $ATMNPQRSD$, проведенным между точками A и D, лемму предыдущего параграфа:

$$AB+BC+CD<AT+TM+MN+NP+PQ+QR+RS+SD.$$

С другой стороны, так как отрезок ST короче ломаной SLT, то можем написать:

$$AT+AD+DS<TL+LS.$$



Черт. 237

Сложим почленно эти два неравенства и отнимем от обеих частей вспомогательные отрезки AT и DS; далее, заменим сумму $TL+TM$ отрезком LM и сумму $LS+RS$ отрезком LR; тогда получим то, что требовалось доказать.

228. Определение длины окружности. Впишем в данную окружность (черт. 237) правильный многоугольник, например шестиугольник, и на какой-нибудь прямой MN (черт. 238) отложим отрезок OP_1, равный периметру этого шестиугольника (на нашем чертеже этот периметр изображен по недостатку свободного места в уменьшенном



Черт. 238

виде). Удвоим теперь число сторон вписанного многоугольника, т. е. вместо шестиугольника возьмем правильный вписанный 12-угольник. Найдем также его периметр и отложим его на той же прямой MN от той же точки O; пусть тогда получится отрезок OP_2, который должен быть больше OP_1, так как вместо каждой стороны шестиугольника мы теперь берем ломаную (из двух сторон 12-угольника), которая длиннее прямой. Удвоим снова число сторон вписанного многоугольника, т. е. возьмем теперь правильный 24-угольник (на чертеже он не указан), найдем его периметр и отложим его по MN от той же точки O; мы получим тогда отрезок OP_3, который будет больше OP_2 по той же причине, по какой OP_2 больше OP_1.

Вообразим, что такой процесс удвоения и откладывания периметров продолжается все далее и далее. Тогда мы получим неопределенный ряд периметров OP_1, OP_2, OP_3, . . ., которые все возрастают. Однако возрастание это не может идти беспредельно, так как периметр всякого вписанного многоугольника (выпуклого), каково бы ни было число его сторон, всегда остается меньше периметра любого описанного многоугольника (как его объемлющего). Вследствие этого периметр правильного вписанного многоугольника, увеличиваясь при каждом удвоении числа его сторон, должен приближаться все более и более к некоторой определенной длине, например к длине Ox, указанной на чертеже.

Если какая-нибудь переменная величина (как у нас периметр вписанного многоугольника, число сторон которого все удваивается) при своем изменении приближается к какой-нибудь постоянной величине так, что разность между этой постоянной величиной и пере-

менной может быть сделана как угодно малой, то такую постоянную величину принято называть *пределом* переменной [1].

Заметив это, мы можем высказать следующее о п р е д е л е н и е: **за длину окружности принимается тот предел, к которому стремится (приближается) периметр правильного многоугольника, вписанного в эту окружность, когда число сторон его неограниченно удваивается.**

Можно доказать, что предел этот не зависит от того, с какого многоугольника мы начинаем удвоение. Более того, можно доказать, что, если даже вписанные многоугольники и не будут правильные, все же периметры их стремятся к тому же самому пределу, как и периметры правильных многоугольников, лишь бы только стороны их неограниченно уменьшались (и, следовательно, число сторон неограниченно увеличивалось) путем ли удвоения, как мы это предполагали для правильных многоугольников, или по какому-нибудь иному закону (мы опускаем это доказательство). Таким образом, для каждой окружности существует свой единственный предел, к которому стремится периметр вписанного выпуклого многоугольника, когда стороны его безгранично уменьшаются; предел этот и принимается за длину окружности [2].

Равным образом за длину какой-нибудь дуги AB (черт. 239) принимается предел, к которому стремится правильная ломаная линия, вписанная в эту дугу и имеющая с ней одни и те же концы, когда число сторон ломаной неограниченно удваивается.

229. С л е д с т в и я. 1. **Равные дуги (и равные окружности) имеют и равные длины**, так как вписываемые в них правильные ломаные линии (или многоугольники) можно брать совершенно одинаковыми.

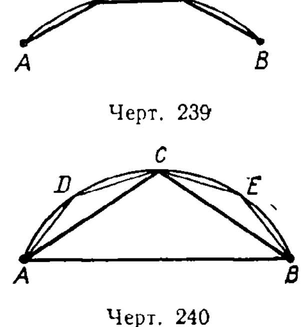
2. **Длина суммы дуг равна сумме длин этих дуг.**

Действительно, если дуга s есть сумма двух дуг s_1+s_2, то ломаную линию мы можем вписывать в дугу s таким образом, что она будет состоять из двух ломаных: одной, вписанной в s_1, и другой, вписанной в s_2. Тогда очевидно, что предел, к которому стремится периметр ломаной, вписанной в дугу s, равен сумме пределов периметра ломаных, вписанных в дуги s_1 и s_2.

230. Т е о р е м а. **Длина дуги больше стягивающей ее хорды, но меньше периметра всякой ломаной линии, описанной около этой дуги и имеющей с ней одни и те же концы.**

1. Пусть ACB (черт. 240) есть дуга окружности и AB — стягивающая ее хорда; требуется доказать, что длина дуги больше этой хорды.

Предположим, что в дугу мы вписываем правильные ломаные таким образом: первая ломаная пусть будет составлена из двух хорд AC и CB; вторую ломаную получим путем удвоения числа сторон первой ломаной; это будет ломаная $ADCEB$, состоящая из четырех хорд; третью ломаную получим удвоением числа сторон второй ломаной; она будет состоять из восьми хорд. Вообразим, что этот процесс удвоения продолжается без кон-



Черт. 239

Черт. 240

[1] Основные свойства пределов и различные применения их в геометрии изложены нами в «Элементах алгебры и анализа», ч. 2.

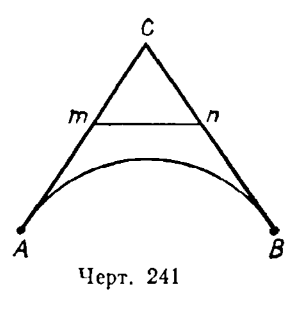
[2] Иное определение длины окружности, независимое от понятия о пределе, изложено ниже, в § 267 и следующих.

на. Тогда с каждым удвоением периметр ломаной будет все возрастать; например,

$$AD+DC+CE+EB>AC+CB,$$

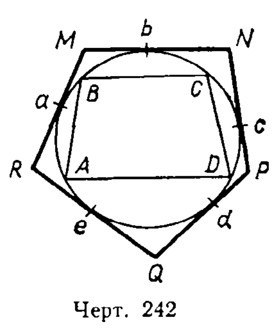
так как

$$AD+DC>AC \quad \text{и} \quad CE+EB>CB.$$



Черт. 241

Вследствие этого предел, к которому стремится этот периметр, должен быть больше периметра первой ломаной, т. е. больше суммы $AC+CB$, и, значит, должен быть и подавно больше хорды AB. Но предел этот принимается за длину дуги ACB; значит, эта длина больше хорды AB.



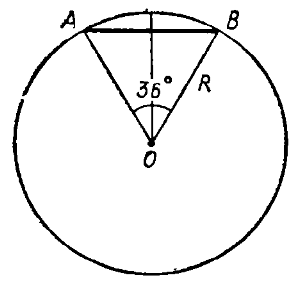
Черт. 242

2. Пусть около дуги описана какая-нибудь ломаная линия (правильная или неправильная — все равно). Если концы ломаной совпадают с концами дуги, то эту дугу можно рассматривать как сумму нескольких дуг, из которых каждая объемлется ломаной, состоящей только из двух прямых. Пусть одна из таких частей будет дуга AB (черт. 241). Докажем, что длина этой части меньше суммы $AC+CB$, которую мы для краткости обозначим одной буквой S.

Для доказательства возьмем вспомогательную ломаную $AmnB$, которая получится, если мы срежем угол C каким-нибудь отрезком прямой mn, не пересекающимся с дугой AB (что всегда возможно, если ломаная описана, т. е. составлена из касательных). Обозначим длину этой вспомогательной ломаной буквой S'. Так как $mn<mC+Cn$, то $S'<S$.

Докажем теперь, что предел, к которому стремится периметр правильной ломаной, вписанной в дугу AB, при неограниченном удвоении числа сторон ломаной не может быть больше S'. Обозначим этот предел буквой L и допустим, что $L>S'$. Так как переменный периметр приближается к своему пределу L как угодно близко, то разность между L и этим периметром может сделаться меньше разности $L - S'$; тогда, значит, периметр вписанной ломаной сделается больше S'. Но это невозможно, так как всякая выпуклая ломаная линия, вписанная в дугу AB, есть объемлемая по отношению к объемлющей ломаной $AmnB$ и потому она меньше S'. Следовательно, нельзя допустить, что $L>S'$. Но тогда длина L должна быть или меньше S', или в крайнем случае равна S'. Но так как $S'<S$, то и в том, и другом случае должно быть: $L<S$, что и требуется доказать.

231. Следствие. Пусть в данную окружность (черт. 242) вписан какой-нибудь многоугольник $ABCD$ и около нее описан какой-нибудь многоугольник $MNPQR$. Так как дуга AB больше хорды AB, дуга BC больше хорды BC и т. д., то **длина окружности больше пери-**



Черт. 243

метра всякого вписанного многоугольника (выпуклого). С другой стороны, дуга ab (как выпуклая) меньше объемлющей ломаной $aM+$ $+Mb$; дуга bc меньше $bN+Nc$ и т. д.; следовательно, сумма дуг $ab+bc+cd+\ldots$ меньше суммы прямых $aM+Mb+bN+Nc+\ldots$, т. е. **длина окружности меньше периметра всякого описанного многоугольника.**

Например, окружность больше периметра правильного вписанного шестиугольника и меньше периметра описанного квадрата; значит, окружность больше 6 радиусов и меньше 8 радиусов (так как сторона правильного вписанного шестиугольника равна радиусу, а сторона описанного квадрата — диаметру.)

232. Понятие о вычислении длины окружности по данному ее радиусу. Впишем в окружность (длина радиуса которой предполагается известной) какой-нибудь правильный многоугольник, например 10-угольник, и вычислим его периметр. Для этого предварительно найдем длину одной стороны этого многоугольника. Пусть AB (черт. 243) будет эта сторона. Тогда центральный угол AOB будет 36°. Заметив это, воспользуемся свойством хорды, указанным нами в § 223, а именно: «хорда равна удвоенному произведению радиуса на синус половины центрального угла, опирающегося на эту хорду». Обозначив радиус буквой R, получим:

$$AB=a_{10}=2R\sin 18^\circ.$$

Тогда периметр, равный сумме десяти сторон, выразится (обозначим его p_{10}):

$$p_{10}=(2R\sin 18^\circ)\cdot 10=20R\sin 18^\circ.$$

Из таблицы тригонометрических функций находим (ограничиваясь четырьмя десятичными знаками):

$$\sin 18^\circ=0{,}3090;\ \text{следовательно,}\ p_{10}=20R\cdot 0{,}3090=6{,}18R.$$

Удвоим теперь число сторон вписанного многоугольника, т. е. возьмем правильный вписанный 20-угольник. Для такого многоугольника получим:

$$a_{20}=2R\sin 9^\circ=2R\cdot 0{,}1564;$$

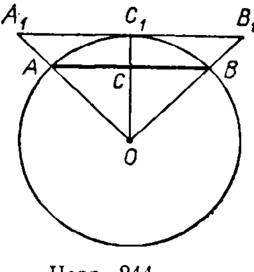
следовательно,

$$p_{20}=40R\cdot 0{,}1564=R\cdot 6{,}256.$$

Удвоим снова число сторон вписанного многоугольника, т. е. возьмем правильный вписанный 40-угольник, центральный угол которого равен 9°. Для такого многоугольника получим:

$$a_{40}=2R\sin 4^1/_2{}^\circ;\quad p_{40}=80R\sin 4^1/_2{}^\circ.$$

В наших таблицах мы не находим угла в $4^1/_2°$. Тогда возьмем для приблизительной величины $\sin 4^1/_2°$ среднее арифметическое между $\sin 4°$ и $\sin 5°$ [1]. Это будет:



Черт. 244

$$\frac{1}{2}(0,0698+0,0872)=\frac{1}{2}\cdot 0,1570=0,0785.$$

Тогда получим: $p_{40}=80R\cdot 0,0785=$ $=R\cdot 6,2800$.

Если мы не будем производить дальнейшего удвоения, а примем за длину окружности найденный p_{40}, то, конечно, возьмем число, меньшее, чем следует, так как длина окружности больше периметра всякого вписанного многоугольника (в том числе и периметра 40-угольника). Чтобы узнать, как велика будет при этом погрешность, мы вычислим еще периметр правильного описанного 40-угольника, который, как периметр всякого описанного многоугольника, должен быть больше длины окружности.

Так как правильные одноименные многоугольники подобны и стороны их относятся как апофемы (**213**), то сторона описанного 40-угольника должна быть больше стороны вписанного 40-угольника во столько раз, во сколько апофема первого больше апофемы второго. Это видно непосредственно из черт. 244, на котором AB есть сторона какого-нибудь правильного вписанного многоугольника, а A_1B_1 — сторона одноименного описанного многоугольника. Из подобия треугольников OAB и OA_1B_1 находим:

$$A_1B_1:AB=OC_1:OC.$$

Обозначив сторону AB через a_{40}, сторону A_1B_1 через a'_{40} и радиус через R, получим:

$$a'_{40}:a_{40}=R:OC,$$

откуда

$$a'_{40}=\frac{a_{40}R}{OC}.$$

Из прямоугольного $\triangle OAC$ определяем катет OC:

$$OC=AO\cos AOC=R\cos 4^1/_2°.$$

Значит,

$$a'_{40}=\frac{a_{40}R}{R\cos 4^1/_2°}=\frac{a_{40}}{\cos 4^1/_2°}.$$

Обозначив периметр описанного 40-угольника буквой P_{40}, можем написать:

$$P_{40}=\frac{40a_{40}}{\cos 4^1/_2°}=\frac{p_{40}}{\cos 4^1/_2°}.$$

[1] Т. е. мы предположим, что возрастание синуса при возрастании угла от 4° до 5° пропорционально возрастанию самого угла, что не вполне верно, но ошибка, допускаемая при этом, очень ничтожна.

Подставив вместо p_{40} найденное выше число $R \cdot 6,2800$ и приняв за $\cos 4^1/_2{}^\circ$ среднее арифметическое между $\cos 4^\circ=0,9976$ и $\cos 5^\circ= =0,9962$, т. е. число 0,9969, получим:

$$P_{40}=\frac{R\cdot 6,2800}{0,9969}=R\cdot\frac{62800}{9969}=R\cdot 6,2995.$$

Мы нашли таким образом два числа, между которыми заключается длина окружности. Обозначив ее буквой C, можем написать:

$$P_{40}>C>p_{40}, \quad \text{т. е.} \quad R\cdot 6,2995>C>R\cdot 6,2800.$$

Так как разность между крайними числами этого неравенства составляет $R \cdot 0,0195$, что менее $R \cdot 0,02$, то каждая из разностей $C - p_{40}$ и $P_{40} - C$ должна быть меньше 0,02 радиуса (или 0,01 диаметра). Значит, если примем, что

$$C=6,28R \quad (\text{иначе:} \quad C=3,14\cdot 2R),$$

то мы получим приближенную длину окружности с недостатком с точностью до 0,01 диаметра.

233. Отношение длины окружности к диаметру. Рассматривая указанный процесс нахождения длины окружности, мы замечаем, что число, на которое нужно умножить диаметр, чтобы получить длину окружности, не зависит от величины самого диаметра, так что если мы нашли, что длина какой-нибудь окружности равна ее диаметру, умноженному на некоторое число, то и длина всякой другой окружности будет равна ее диаметру, умноженному на то же самое число. Выражая эту мысль другими словами, мы можем сказать, что **отношение длины окружности к ее диаметру есть число постоянное для всех окружностей.**

Это постоянное число принято обозначать греческой буквой π [1]. Мы можем, таким образом, для длины C окружности написать такую формулу:

$$C=2R\cdot\pi, \quad \text{или} \quad C=2\pi R.$$

Доказано, что число π принадлежит к числам и р р а ц и о н а л ь н ы м и, значит, оно не может быть выражено точно никакой дробью. Но его приближенные значения можно находить различными способами с какой угодно точностью. Выше, приняв периметр вписанного 40-угольника за приближенную сторону окружности, мы получили для π приближенное число 3,14 с недостатком и с точностью до 0,01. Эта точность для практических целей почти всегда достаточна. В случаях особенной точности можно довольствоваться таким приближенным значением (с избытком):

$$\pi=3,1416.$$

Ученые, пользуясь упрощенными способами (которые указываются высшей математикой), вычислили π с точностью, далеко превосходящей

[1] Обозначение это введено, по всей вероятности, в XVII столетии. Буква π (пи) есть начальная буква греческого слова περιφέρεια (окружность).

всякие практические требования (так, английский математик Шенкс в 1873 г. нашел 707 десятичных знаков числа π [1]).

Полезно заметить, что еще в III в. до начала нашей эры знаменитый Сиракузский геометр Архимед нашел для π очень простое число 22/7, т. е. $3^1/_7$. Это число несколько более π и разнится от него менее чем на 2 тысячных.

При решении геометрических задач часто встречается число, обратное числу π, т. е. равное дроби $1/\pi$. Полезно запомнить несколько цифр этого числа:

$$\frac{1}{\pi}=0{,}3183098\ldots$$

234. Длина дуги в n°. Длина окружности есть $2\pi R$, значит, длина дуги в 1° равна $\frac{2\pi R}{360}=\frac{\pi R}{180}$; следовательно, длина s дуги, содержащей n°, выразится так:

$$s=\frac{\pi R n}{180}.$$

Если дуга выражена в минутах (n') или в секундах (n''), то длина ее определяется формулами.

$$s_{\text{I}}=\frac{\pi R n}{180\cdot 60}, \quad s_{\text{II}}=\frac{\pi R n}{180\cdot 60\cdot 60}.$$

235. Задача 1. Вычислить с точностью до 1 мм радиус такой окружности, дуга которой, содержащая 81°21′36″, равна 0,452 м.

Обратив 81°21′36″ в секунды, получим число 292 896.

Из уравнения $0{,}452=\frac{\pi R\cdot 292\,896}{180\cdot 60\cdot 60}$ находим:

$$R=\frac{0{,}452\cdot 180\cdot 60\cdot 60}{292\,896\pi}=\frac{1}{\pi}=0{,}318 \text{ (м)}.$$

Задача 2. Определить число градусов дуги, длина которой равна радиусу.

---

[1] Для запоминания довольно длинного ряда цифр, выражающих число π, можно пользоваться следующим французским двустишием:

Que j'aime á faire apprendre
Un nombre utile aux hommes!

или следующим русским (придуманным преподавателем Нижегородской гимназии Шенроком):

Кто и шутя, и скоро пожелает (ъ)
Пи узнать число, уж (ъ) знает (ъ)!

Если выписать в ряд числа букв, заключающихся в каждом слове этих фраз, то получим для π приближенное число (с избытком) 3, 1415926536, верное до одной половины десятибиллионной.

Заменив в формуле, определяющей длину дуги в $n°$, величину s на R, получим уравнение

$$R=\frac{\pi R n}{180}, \text{ или } 1=\frac{\pi n}{180};$$

откуда

$$n=\frac{180}{\pi}=180\cdot\frac{1}{\pi}=180\cdot 0{,}3183098=57{,}295\,764°=57°17'44'',8.$$

Заметим, что дуга, равная радиусу, называется *радианом*[1].

УПРАЖНЕНИЯ

324. Доказать, что в двух кругах отношение центральных углов, соответствующих дугам, имеющим одинаковую длину, равно обратному отношению радиусов.

325. Как велика будет ошибка, если вместо полуокружности возьмем сумму стороны правильного вписанного треугольника и стороны вписанного квадрата?

326. На окружности взята точка A и через нее проведены диаметр AB, сторона правильного вписанного шестиугольника AC и касательная MN. Из центра O опущен на AC перпендикуляр и продолжен до пересечения с касательной в точке D. От этой точки отложена по касательной (через точку A) прямая DE, равная трем радиусам. Точка E соединена с концом диаметра B. Определить, как велика погрешность, если прямую BE возьмем за длину полуокружности[2].

327. На диаметре данной полуокружности построены две равные полуокружности, и в ту часть плоскости, которая заключена между тремя полуокружностями, вписан круг. Доказать, что диаметр этого круга относится к диаметру равных полуокружностей, как 2 : 3.

328. Вычислить в градусах, минутах и секундах дугу, равную стороне квадрата, вписанного в эту окружность.

329. Вычислить длину одного градуса земного экватора, принимая радиус Земли в 859 географических миль.

ОТДЕЛ ПЯТЫЙ

ИЗМЕРЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ

I. ПЛОЩАДИ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

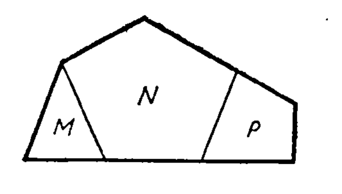
236. Понятие о площади. Каждый из нас имеет некоторое представление из повседневной жизни о той величине, которая называется площадью. Например, всякий знает, что для земледельца, полу-

---

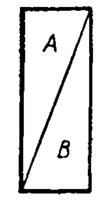
[1] Для безошибочного написания цифр радиана полезно запомнить следующую фразу, придуманную зав. уч. частью рабфака Технологического института в Ленинграде А. Шенкманом:

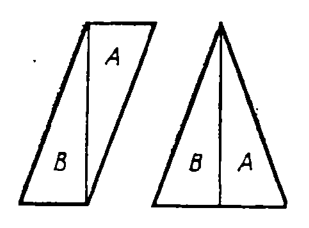
«Цифры радиана и порядок шутя пишу наизусть».
5 7 1 7 4 4 8

[2] Доказано, что посредством циркуля и линейки нет возможности построить такой отрезок прямой, который в точности равнялся бы длине окружности. Однако есть несколько способов для приближенного спрямления. В задачах 325 и 326 указаны два из этих способов. Последний из них, принадлежащий польскому иезуиту Коханскому (1683 г.), замечателен тем, что может быть выполнен одним раствором циркуля.



Черт. 245





Черт. 246

чающего кусок земли для обработки, главным образом важна не форма этого куска, а только величина поверхности, которую придется ему обрабатывать; равным образом, для маляра, которому предстоит окрасить крышу дома, не имеет значения форма крыши, а только величина ее поверхности и т. п. Мы займемся теперь установлением более точного понятия о площади фигур и указанием способов ее измерения.

237. Основные допущения о площадях. Величина части плоскости, заключенной внутри многоугольника или какой-нибудь другой плоской замкнутой фигуры, называется площадью этой фигуры. Относительно этой величины мы сделаем следующие допущения:

1. Равные фигуры, т. е. такие, которые могут быть совмещены при наложении[1], имеют равные площади независимо от их положения в пространстве.

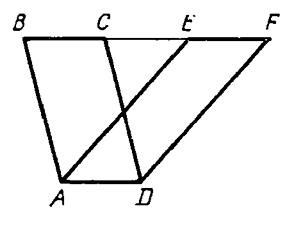
2. Площадь какой-нибудь фигуры (например, изображенной на черт. 245), состоящей из нескольких частей (M, N, P), принимается за сумму площадей этих частей.

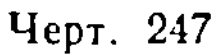
3. Если фигуры (например, изображенные на черт. 246) разложены на одинаковое число частей A, B, . . ., соответственно друг другу равных, то площади таких фигур, представляя собой суммы соответственно равных слагаемых, считаются равными независимо от того, как расположены эти части относительно друг друга.

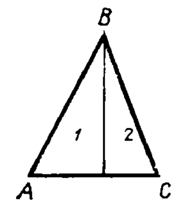
Фигуры, имеющие равные площади, принято называть *равновеликими*. Конечно, равные фигуры (совмещающиеся при наложении) всегда и равновелики, но равновеликие фигуры могут быть неравными (как те, которые изображены на черт. 246).

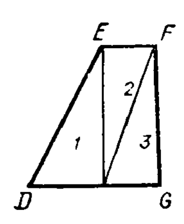
4. Фигуры считаются также равновеликими и тогда, когда они могут быть дополнены равными (или равновеликими) фигурами таким образом, что образуются одинаковые суммы, или суммы, равные между собой. Возьмем, например, два параллелограмма $ABCD$ и $AEFD$ (черт. 247), построенные на одном основании AD и имеющие одинаковые высоты. Дополним левый параллелограмм $\triangle DCF$, а правый параллелограмм $\triangle ABE$. Тогда мы получим одну и ту же сумму, именно трапецию $ABFD$. Так как дополняющие треугольники равны между собой ($AB=DC$, $AE=DF$ и $\angle BAE=\angle CDF$) и после дополнения получилась одна и та же сумма, то взятые два параллелограмма надо считать равновеликими.

[1] Такие фигуры называются конгруэнтными.




Черт. 247



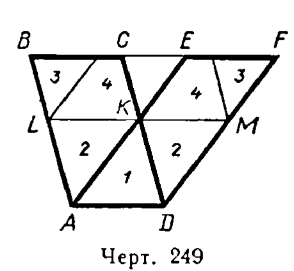


Черт. 248

5. Площадь одной фигуры считается меньшей площади другой фигуры, если первая окажется равновеликой какой-нибудь части другой. Например, площадь $\triangle$ ABC (черт. 248), состоящего из двух прямоугольных треугольников 1 и 2, меньше площади трапеции $DEFG$, состоящей из двух таких же треугольников (обозначенных теми же цифрами, как и в $\triangle$ ABC), но сверх того еще и из треугольника третьего.

238. Замечания. 1. Равновеликость, указанная в п. 3, называется *равновеликостью по разложению*, а та, которая указана в п. 4, называется *равновеликостью по дополнению*. Можно доказать, что равновеликость второго рода всегда может быть сведена на равновеликость первого рода, т. е. что всякие две фигуры, равновеликие по дополнению, могут быть разложены на одинаковое число частей, соответственно совмещающихся. Мы не будем излагать этого доказательства в общем виде, а ограничимся указанием одного частного случая. Параллелограммы, о которых мы только что говорили, могут быть разложены на соответственно равные части следующим образом (черт. 249). Через точку K, в которой пересекаются стороны AE и CD, проведем $LM \parallel AD$ и затем через L — прямую, параллельную AE, и через M — прямую, параллельную CD. Тогда каждый из параллелограммов разобьется на четыре части, которые попарно друг другу равны, как нетрудно убедиться из рассмотрения чертежа.

2. Относительно указанных допущений о площадях возникает следующий важный вопрос. Положим, что, разбив данную фигуру на некоторое число частей произвольной формы, мы перемещаем эти части разнообразными способами (подобно тому, как на черт. 246 перемещены части A и B); мы будем тогда получать различные новые фигуры. Не может ли при этом получиться и такая фигура, которая, помещенная на начальную фигуру или на какую-нибудь из образовавшихся из нее новых фигур, *вся уместится внутри* этой фигуры? Если бы это случилось, то мы имели бы тогда две фигуры, которые, с одной стороны, состоя из одинакового числа попарно совмещающихся частей, должны считаться равновеликими; а с другой стороны, та из них, которая способна поместиться внутри другой и, таким образом, может составить часть этой другой, должна считаться меньшей из двух. Тогда указанные допущения о равенстве и неравенстве площадей теряли бы всякий смысл, так как согласно этим допущениям две площади могли бы одновременно считаться и равными, и неравными.



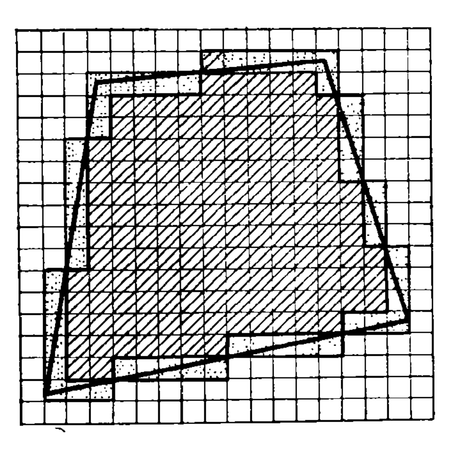
Черт. 249

Впервые обратил внимание на этот вопрос итальянский математик Де-Цольт, который (в 1881 г.) пытался доказать (но неудачно), что многоугольник никогда не может оказаться равновеликим своей части (и, значит, предположенный нами случай невозможен). Это предложение Де-Цольта принималось сначала как недоказуемый постулат равновеликости, но затем (в конце XIX столетия) оно было строго доказано (С. Шатуновским, Гильбертом и др.).

Мы опускаем эти доказательства по причине их сложности.

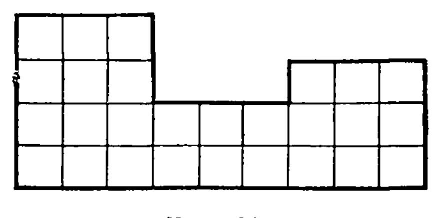
239. Понятие об измерении площади. Поясним наглядно, как можно получить число, измеряющее площадь какой-нибудь фигуры.

Для измерения площади данной фигуры мы прежде всего должны выбрать единицу площади. За такую единицу берут площадь такого квадрата, у которого сторона равна линейной единице, например квадратный метр, квадратный сантиметр и т. п. Выбрав единицу площади, можно накладывать ее на измеряемой площади столько раз, сколько можно. Всего проще это можно сделать (по крайней мере для небольших площадей, которые можно начертить на бумаге) при помощи так называемой палетки, т. е. прозрачной канвовой бумаги (например, миллиметровой), которая равноотстоящими параллельными прямыми (горизонтальными и вертикальными) разделена на маленькие квадратики. Допустим, что на фигуру, площадь которой надо измерить (например, на четырехугольник, изображенный на черт. 250), наложена такая сеть квадратов. Тогда по отношению к этой фигуре все квадраты можно, очевидно, разбить на три рода: 1) внешние квадраты, 2) внутренние квадраты и 3) те квадраты, через которые проходит контур фигуры и которые, следовательно, лежат частью вне, частью внутри фигуры. Оставив без внимания внешние квадраты, сосчитаем отдельно квадраты внутренние и квадраты 3-го рода. Пусть первых окажется m, а вторых n. Тогда, очевидно, площадь будет больше m, но меньше $m+n$ квадратных единиц. Числа m и $m+n$ будут в этом случае приближенные меры измеряемой площади, первое число с недостатком, второе с избытком, причем погрешность меньше n квадратных единиц. Чтобы получить более точный результат, уплотним сеть квадратов, подразделив каждый из них на более мелкие квадраты. Тогда мы получим другие приближенные меры площади, причем погрешность будет меньше прежней (так как находящиеся внутри фигуры новые квадраты будут теперь плотнее прилегать к контуру фигуры).



Черт. 250

Иногда, поступая описанным способом, мы можем получить точ-



Черт. 251

ную меру площади. Это будет, например, тогда, когда контур данной фигуры представляет собой ломаную линию (черт. 251), стороны которой совпадают с частями прямых линий, образующих сеть квадратов; в этом случае, следовательно, не будет совсем квадратов, прорезываемых контуром фигуры, и потому число квадратов, лежащих внутри фигуры, составит точную меру измеряемой площади.

В остальных случаях указанный прием измерения дает только приближенные результаты.

Представим себе, что какими-нибудь соображениями мы нашли такое число Q (целое, дробное или иррациональное), которое оказывается бóльшим всякого приближенного результата измерения, взятого с недостатком, и меньшим всякого приближенного результата измерения, взятого с избытком; тогда такое число может быть принято за точную меру измеряемой площади. Доказано, что такое число существует для всякой площади и обладает следующими двумя свойствами: при одной и той же квадратной единице: 1) площадям равных фигур (совмещающихся) соответствуют равные числа и 2) сумме площадей (237,2) соответствует сумма чисел[1]. Отсюда следует, что большей площади соответствует большее число, равновеликим фигурам соответствуют равные числа и т. п.

В действительности измерение площадей производится косвенным путем, посредством измерения некоторых линий фигуры. Как это делается, мы увидим из следующих параграфов.

240. Основание и высота. Условимся одну из сторон треугольника или параллелограмма называть *основанием* этих фигур, а перпендикуляр, опущенный на эту сторону из вершины треугольника или из какой-нибудь точки противоположной стороны параллелограмма, будем называть *высотой*.

В прямоугольнике за высоту можно взять сторону, перпендикулярную к той, которая принята за основание.

В трапеции основаниями называют обе параллельные стороны, а высотой — общий перпендикуляр между ними.

Основание и высота прямоугольника называются его *измерениями*.

241. Теорема. **Площадь прямоугольника равна произведению его основания на высоту.**

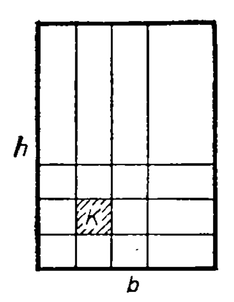
Это краткое предложение надо понимать так: число, выражающее площадь прямоугольника в квадратных единицах, равно произведению чисел, выражающих основание и высоту его в соответствующих линейных единицах.

При доказательстве могут представиться три случая:

1. Основание и высота, измеренные одной и той же единицей, выражаются целыми числами.

[1] См.: Killing W. und Hovestadt. Handbuch des mathematischen Unterrichts, I. Band.

Пусть у данного прямоугольника (черт. 252) основание равно целому числу b линейных единиц, а высота — целому числу h тех же единиц. Разделив основание на b и высоту на h равных частей, проведем через точки раздела ряд прямых, параллельных высоте, и другой ряд прямых, параллельных основанию. От взаимного пересечения этих прямых образуются некоторые четырехугольники. Возьмем какой-нибудь один из них, например четырехугольник K (покрытый на чертеже штрихами). Так как стороны этого четырехугольника по построению параллельны соответствующим сторонам данного прямоугольника, то все углы его прямые; значит, четырехугольник K есть прямоугольник. С другой стороны, каждая сторона этого прямоугольника равна расстоянию между соседними параллельными прямыми, т. е. равна одной и той же линейной единице. Значит, прямоугольник K представляет собой квадрат, а именно ту квадратную единицу, которая соответствует взятой линейной единице (если, например, основание и высота были измерены линейными сантиметрами, то квадрат K есть квадратный сантиметр). Так как сказанное об одном четырехугольнике может быть повторено о всяком другом, то, значит, проведением указанных параллельных прямых мы разбиваем всю площадь данного прямоугольника на квадратные единицы. Найдем их число. Очевидно, что ряд прямых, параллельных основанию, разделяет прямоугольник на столько равных горизонтальных полос, сколько в высоте содержится линейных единиц, т. е. на h равных полос. С другой стороны, ряд прямых, параллельных высоте, разбивает каждую горизонтальную полосу на столько квадратных единиц, сколько в основании содержится линейных единиц, т. е. на b квадратных единиц. Значит, всех квадратных единиц окажется $b \cdot h$. Таким образом,



Черт. 252

$$\text{площадь прямоугольника} = bh,$$

т. е. она равна произведению основания на высоту.

2. Основание и высота, измеренные одной и той же единицей, выражаются **дробными числами**.

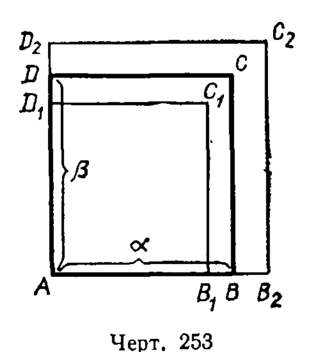
Пусть, например, у данного прямоугольника:

$$\text{основание} = 3^1/_2 = ^7/_2 \text{ лин. ед.};$$
$$\text{высота} = 4^3/_5 = ^{23}/_5 \text{ той же ед.}$$

Приведя дроби к одинаковому знаменателю, получим:

$$\text{основание} = ^{35}/_{10}; \qquad \text{высота} = ^{46}/_{10}.$$

Примем $^1/_{10}$ долю линейной единицы за новую единицу длины. Тогда мы можем сказать, что основание содержит 35 этих новых единиц, а высота — 46 тех же единиц. Значит, по доказанному в случае 1, площадь прямоугольника равна $35 \cdot 46$ таких квадратных единиц, которые соответствуют новой единице длины. Но эта квадратная



Черт. 253

единица составляет $^1/_{100}$ часть квадратной единицы, соответствующей прежней линейной единице; значит, площадь прямоугольника в прежних квадратных единицах равна:

$$\frac{35\cdot 46}{100}=\frac{35}{10}\cdot\frac{46}{10}=3\frac{1}{2}\cdot 4\frac{3}{5}.$$

3. Основание и высота (или только одно из этих измерений) несоизмеримы с единицей длины и, следовательно, выражаются иррациональными числами.

В этом случае можно довольствоваться приближенным результатом измерения площади с желаемой степенью точности.

Можно, впрочем, доказать, что и в этом случае точная величина площади равняется произведению основания на высоту.

Пусть основание AB прямоугольника $ABCD$ (черт. 253) выражается иррациональным числом α и высота AD — иррациональным числом β. Найдем приближенные значения этих чисел с точностью до $1/n$. Для этого на основании AB, начиная от точки A, отложим $1/n$ долю линейной единицы столько раз, сколько можно. Пусть окажется, что, отложив m таких долей, мы получим отрезок $AB_1<AB$, а отложив $m+1$ долей, найдем отрезок $AB_2>AB$. Тогда дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{m+1}{n}$ будут приближенные значения числа α, первая с недостатком, вторая с избытком. Положим, далее, что, отложив $1/n$ долю линейной единицы на высоте AD (от точки A) p раз, мы получим $AD_1<AD$, а отложив $p+1$ раз, найдем $AD_2>AD$; тогда дроби $\frac{p}{n}$ и $\frac{p+1}{n}$ будут приближенные значения числа β, первая с недостатком, вторая с избытком. Построим два вспомогательных прямоугольника $AB_1C_1D_1$ и $AB_2C_2D_2$. У каждого из них основание и высота выражаются дробными числами:

$$AB_1=\frac{m}{n};\quad AB_2=\frac{m+1}{n};\quad AD_1=\frac{p}{n};\quad AD_2=\frac{p+1}{n}.$$

Поэтому согласно доказанному в случае 2-м

$$\text{пл. } AB_1C_1D_1=\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{n},$$

$$\text{пл. } AB_2C_2D_2=\frac{m+1}{n}\cdot\frac{p+1}{n}.$$

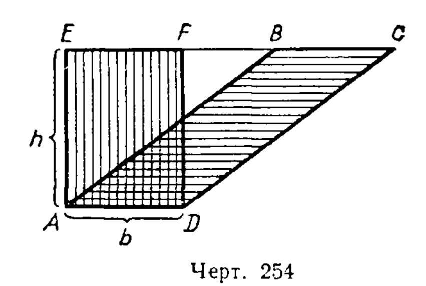
Так как площадь $AB_1C_1D_1$ есть часть площади $ABCD$, а эта последняя есть часть площади $AB_2C_2D_2$, то

$$\text{пл. } AB_1C_1D_1<\text{пл. } ABCD<\text{ пл. } AB_2C_2D_2$$

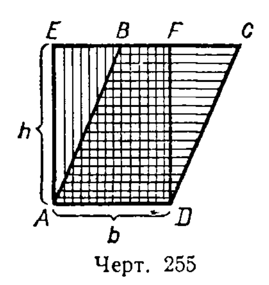
и потому

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}<\text{число, измеряющее пл. } ABCD<\frac{m+1}{n}\cdot\frac{p+1}{q}.$$

Это двойное неравенство остается верным при всяком значении n, т. е. оно остается верным, с какой бы точностью мы ни находили приближенные значения чисел α и β. Значит, мы можем сказать, что площадь $ABCD$ должна выражаться таким числом, которое больше произведения любых приближенных значений чисел α и β, если



Черт. 254



Черт. 255

эти значения взяты с недостатком, но меньше произведения любых их приближенных значений, если эти значения взяты с избытком. Такое число, как известно из алгебры, называется *произведением* иррациональных чисел α и β. Следовательно,

$$\text{пл. } ABCD = \alpha\beta,$$

т. е. она и в этом случае равна произведению основания на высоту.

242. Теорема. **Площадь параллелограмма** ($ABCD$, черт. 254 и 255) **равна произведению основания на высоту.**

На основании AD (на том и другом чертеже) построим прямоугольник $AEFD$, у которого сторона EF составляет продолжение стороны BC. Докажем, что пл. $ABCD$ = пл. $AEFD$.

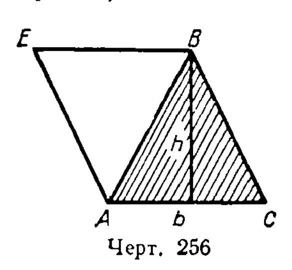
Если параллелограмм дополним $\triangle AEB$, а прямоугольник дополним $\triangle DFC$, то мы получим одну и ту же трапецию $AECD$. Так как дополняющие треугольники равны (имея по две стороны и углу, заключенному между ними, соответственно равными), то параллелограмм и прямоугольник равновелики (по дополнению). Но пл. $AEFD = bh$; следовательно, и пл. $ABCD = bh$, причем b можно рассматривать как основание параллелограмма и h как его высоту.

243. Теорема. **Площадь треугольника** (ABC, черт. 256) **равна половине произведения основания на высоту.**

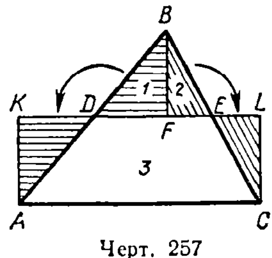
Проведем $BE \parallel AC$ и $AE \parallel BC$. Тогда получим параллелограмм $AEBC$, площадь которого, по доказанному, равна bh. Но площадь $\triangle ABC$ составляет половину площади $AEBC$; следовательно,

$$\text{пл. } ABC = \frac{1}{2} bh.$$

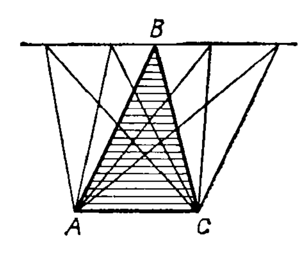
Замечание. Легко убедиться, что всякий треугольник разлагается на части, перемещением которых можно образовать прямоугольник, имеющий одинаковое с треугольником основание и высоту, вдвое меньшую высоты треугольника (см. черт. 257).



Черт. 256



Черт. 257

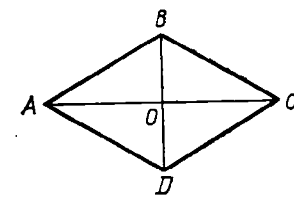


Черт. 258

244. Следствия. 1. **Треугольники с равными основаниями и равными высотами равновелики.**

Если, например, вершину B $\triangle ABC$ (черт. 258) будем перемещать по прямой, параллельной основанию AC, а основание оставим то же самое, то площадь треугольника не будет изменяться.

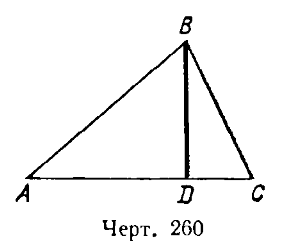
2. **Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов,** потому что один катет можно взять за основание, а другой — за высоту.



Черт. 259

3. **Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.** Действительно, если $ABCD$ (черт. 259) есть ромб, то его диагонали взаимно перпендикулярны. Поэтому

$$\text{пл. } \triangle ABC = {}^1/_2 AC \cdot OB$$
$$\text{пл. } \triangle ACD = {}^1/_2 AC \cdot OD$$
$$\text{пл. } ABCD = {}^1/_2 AC \cdot (OB + OD) = {}^1/_2 AC \cdot BD.$$



Черт. 260

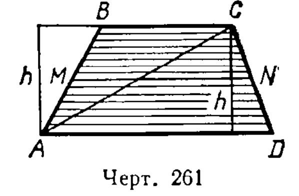
4. **Площади треугольников относятся как произведения их оснований на высоты** (множитель $^1/_2$ сокращается).

245. Другое выражение для площади треугольника. Если BD есть высота $\triangle ABC$ (черт. 260), то из прямоугольного треугольника ABD мы можем вывести:

$$BD = AB \cdot \sin A.$$

Вставив это выражение в формулу для площади треугольника, найдем:

$$\text{пл. треугольника} = {}^1/_2 AC \cdot BD = $$
$$= {}^1/_2 AC \cdot AB \cdot \sin A,$$



Черт. 261

т. е. **площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла, заключенного между ними** [1].

246. Теорема. **Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.**

Проведя в трапеции (черт. 261) $ABCD$ диагональ AC, мы можем рассматривать ее площадь как сумму площадей двух треугольников CAD и ABC. Поэтому

$$\text{пл. } ABCD = \frac{1}{2} AD \cdot h + \frac{1}{2} BC \cdot h = \frac{1}{2}(AD + BC)\, h.$$

---

[1] Предполагается, что стороны берутся такие, между которыми лежит острый угол, так как для тупого угла мы не определяли синуса.

247. Следствие. Если MN (черт. 261) есть средняя линия трапеции, то, как известно (**102**),

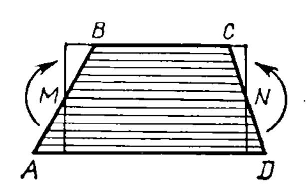
$$MN=\frac{1}{2}(AD+BC).$$

Поэтому

$$\text{пл. } ABCD=MN\cdot h,$$

т. е. **площадь трапеции равна произведению средней линии на высоту.**

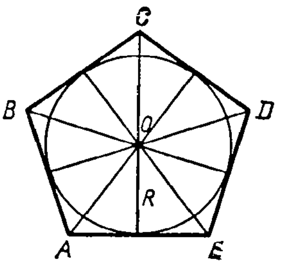
Это же можно видеть и непосредственно из черт. 262.



Черт. 262

248. Теорема. **Площадь всякого описанного многоугольника равна произведению периметра на половину радиуса.**

Соединив центр O (черт. 263) со всеми вершинами описанного многоугольника, мы разделим его на треугольники, в которых за основания можно взять стороны многоугольника, а за высоты — радиус круга. Обозначив этот радиус через R, будем иметь:



Черт. 263

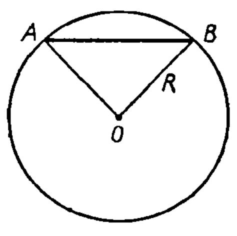
$$\text{пл. } AOB = AB\cdot\frac{1}{2}R;$$

$$\text{пл. } BOC=BC\cdot\frac{1}{2}R \text{ и т. д.}$$

Следовательно,

$$\text{пл. } ABCDE=(AB+BC+CD+DA+EA)\times\frac{1}{2}R=P\cdot\frac{1}{2}R,$$

где буквой P обозначен периметр многоугольника.



Черт. 264

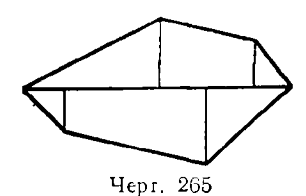
249. Следствие. **Площадь правильного многоугольника равна произведению периметра на половину апофемы,** потому что всякий правильный многоугольник можно рассматривать как описанный около круга, у которого радиус есть апофема.

250. Вычисление площади правильного многоугольника посредством синуса центрального угла. Пусть (черт. 264) AB есть сторона правильного n-угольника и O — его центр. Площадь такого многоугольника состоит из n треугольников, равных $\triangle AOB$. Но площадь этого треугольника равна $^1/_2 AO\cdot OB \sin AOB$ (**245**), т. е. она равна $^1/_2 R^2 \sin\frac{360}{n}$, если буквой R обозначим радиус круга. Значит,

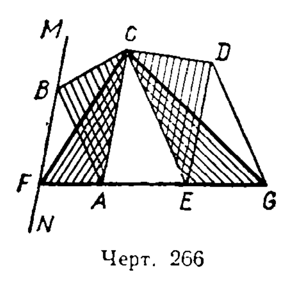
$$\text{пл. правильного } n\text{-угольника}=\left(^1/_2 R^2\sin\frac{360}{n}\right)n=\frac{1}{2}nR^2\sin\frac{360}{n}.$$

Например, площадь правильного шестиугольника равна

$$\frac{1}{2}\cdot 6R^2\sin 60^\circ=3R^2\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}R^2\sqrt{3}.$$



Черт. 265



Черт. 266

251. Площадь неправильного многоугольника. Для нахождения площади какого-нибудь неправильного многоугольника можно его разбить на треугольники (например, диагоналями), вычислить площадь каждого треугольника в отдельности и результаты сложить.

Впрочем, для измерения площади земельного участка, имеющего форму неправильного многоугольника (черт. 265), предпочитают поступать так: намечают (провешивают) наиболее длинную диагональ и из вершин опускают на нее перпендикуляры; тогда участок разобьется на треугольники и трапеции. Определяют площади всех этих частей отдельно и складывают вместе.

252. Задача. Превратить многоугольник ($ABCDE$, черт. 266) в равновеликий треугольник.

Какой-нибудь диагональю AC отсекаем от данного многоугольника $\triangle ABC$. Через ту вершину B этого треугольника, которая лежит против взятой диагонали, проводим прямую $MN \parallel AC$. Затем продолжим одну из сторон: EA или DC, прилежащих к отсеченному треугольнику, до пересечения с прямой MN (на чертеже продолжена сторона EA). Точку пересечения F соединим с C. Треугольники CBA и CFA равновелики (244,1), так как у них общее основание AC, а вершины B и F лежат на прямой, параллельной основанию. Если от данного многоугольника отделим $\triangle CBA$ и вместо него приложим равновеликий ему $\triangle CFA$, то величина площади не изменится; следовательно, данный многоугольник равновелик многоугольнику $FCDE$, у которого, очевидно, число углов на один меньше, чем у данного многоугольника. Таким же приемом можно число углов полученного многоугольника уменьшить еще на один и продолжать такое последовательное уменьшение до тех пор, пока не получится треугольник (FCG на нашем чертеже).

253. Задача. Превратить данный многоугольник в равновеликий квадрат.

Сначала превращают многоугольник в равновеликий треугольник, а затем этот треугольник в квадрат. Пусть основание и высота треугольника будут b и h, а сторона искомого квадрата x. Тогда площадь первого равна $^1/_2bh$, а второго x^2; следовательно,

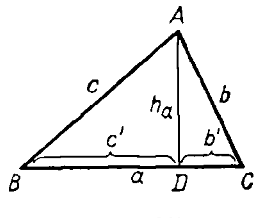
$$\frac{1}{2}bh = x^2,$$

откуда

$$\frac{1}{2}b : x = x : h,$$

т. е. x есть средняя пропорциональная между $^1/_2b$ и h. Значит, сторону квадрата можно построить способом, указанным раньше (181) для нахождения средней пропорциональной.

Впрочем, превращение данного многоугольника в треугольник не всегда необходимо. Например, если речь идет о превращении в квадрат данной трапеции, то достаточно найти среднюю пропорциональную между высотой трапеции и ее средней линией и на полученной прямой построить квадрат.



Черт. 267

254. Задача. Вычислить площадь S треугольника, зная длины a, b и c его сторон.

Пусть высота $\triangle ABC$ (черт. 267), опущенная на сторону a, есть h_a. Тогда

$$S=\frac{1}{2}ah_a.$$

Чтобы найти высоту h_a, возьмем уравнение **(185)**:

$$b^2=a^2+c^2-2ac'$$

и определим из него отрезок c':

$$c'=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}.$$

Из треугольника ABD находим:

$$h_a=\sqrt{c^2-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)^2}=\frac{1}{2a}\sqrt{4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2}.$$

Преобразуем подкоренную величину так:

$$\begin{aligned}(2ac)^2-(a^2+c^2-b^2)^2&=(2ac+a^2+c^2-b^2)\,(2ac-a^2-c^2+b^2)=\\&=[(a^2+c^2+2ac)-b^2]\,[b^2-(a^2+c^2-2ac)]=\\&=[(a+c)^2-b^2]\,[b^2-(a-c)^2]=\\&=(a+c+b)\,(a+c-b)\,(b+a-c)\,(b-a+c).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)\,(a+b-c)(a+c-b)\,(b+c-a)}.$$

Если положим, что $a+b+c=2p$, то

$$a+c-b=(a+b+c)-2b=2p-2b=2\,(p-b).$$

Подобно этому $b+a-c=2\,(p-c)$;
$b+c-a=2\,(p-a)$.

Тогда

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{2p\cdot 2\,(p-a)\cdot 2\,(p-b)\cdot 2\,(p-c)},$$

т. е.

$$S=\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}.$$

Это выражение известно под названием **формулы Герона из Александрии** (жившего приблизительно в III—I вв. до начала нашей эры).

Частный случай. Площадь равностороннего треугольника со стороной a выражается следующей формулой:

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{3a\cdot a\cdot a\cdot a}=\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}.$$

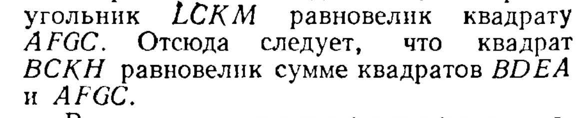
II. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА И ОСНОВАННЫЕ НА НЕЙ ЗАДАЧИ

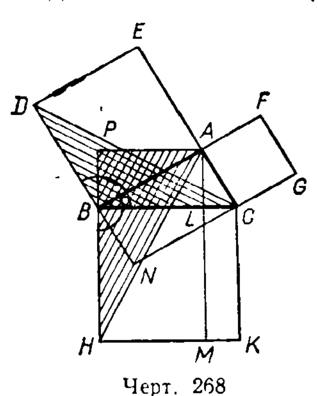
255. Теорема. **Сумма площадей квадратов, построенных на катетах прямоугольного треугольника, равна площади квадрата, построенного на гипотенузе.**

Это предложение, известное под названием теоремы Пифагора, (греческого философа, жившего в VI в. до н. э.), имеет многочисленные доказательства. Приведем простейшие из них.

Первое доказательство (Евклида). Пусть ABC (черт. 268) — прямоугольный треугольник, а $BDEA$, $AFGC$ и $BCKH$ — квадраты, построенные на его катетах и гипотенузе; требуется доказать, что сумма площадей двух первых квадратов равна площади третьего квадрата.

Проведем $AM\perp BC$. Тогда квадрат $BCKH$ разделится на два прямоугольника. Докажем, что прямоугольник $BLMH$ равновелик квадрату $BDEA$, а прямоугольник $LCKM$ равновелик квадрату $AFGC$. Проведем вспомогательные прямые DC и AH. Обратим внимание на два треугольника, покрытые на чертеже штрихами. $\triangle DCB$, имеющий основание BD, общее с квадратом $BDEA$, а высоту CN, равную высоте AB этого квадрата, равновелик половине его. $\triangle ABH$, имеющий основание BH, общее с прямоугольником $BLMH$, и высоту AP, равную высоте BL этого прямоугольника, равновелик половине его. Сравнивая эти два треугольника между собой, находим, что у них $BD=BA$ и $BC=BH$ (как стороны квадрата); сверх того, $\angle DBC=\angle ABH$, так как каждый из этих углов состоит из общей части ABC и прямого угла. Значит, треугольники ABH и BDC равны. Отсюда следует, что прямоугольник $BLMH$ равновелик квадрату $BDEA$. Соединив G с B и A с K, мы совершенно так же докажем, что прямо-


угольник $LCKM$ равновелик квадрату $AFGC$. Отсюда следует, что квадрат $BCKH$ равновелик сумме квадратов $BDEA$ и $AFGC$.



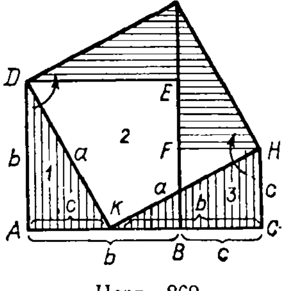
Черт. 268

Второе доказательство. Путь a, b и c будут числа, выражающие гипотенузу и катеты прямоугольного треугольника в одной и той же линейной единице. Как мы видели раньше (**182**), между этими числами существует такая зависимость:

$$a^2=b^2+c^2.$$

Но a^2, b^2 и c^2 суть числа, измеряющие площади квадратов, стороны кото-

рых a, b и c; значит, написанное равенство выражает, что площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах.



Черт. 269

Третье доказательство. Существует много и таких доказательств, которые показывают, на какие части надо разбить квадраты, построенные на катетах, чтобы перемещением этих частей образовать квадрат, построенный на гипотенузе. Вот одно из таких доказательств.

Обозначим гипотенузу и катеты данного треугольника буквами a, b и c. Отложив на какой-нибудь прямой (черт. 269) $AB=b$ и $BC=c$, построим квадраты $ADEB$ и $BFHC$. Площадь образовавшегося шестиугольника $ADEFHC$ есть сумма площадей квадратов, построенных на катетах. Отложив еще $AK=c$ (и, следовательно, $KC=b$), проводим прямые DK и KH, которые разложат шестиугольник на три части, обозначенные на чертеже цифрами 1, 2 и 3. Части первая и третья суть прямоугольные треугольники, равные данному. Повернем на 90° первый треугольник вокруг вершины D и третий треугольник вокруг вершины H, как указано стрелками. Тогда эти части займут такие положения, при которых они вместе с оставшейся второй частью образуют квадрат, построенный на гипотенузе (предоставляем самим учащимся доказать это).

256. Задачи. 1. Построить квадрат, равновеликий сумме двух квадратов.

Строим прямоугольный треугольник, у которого катетами были бы стороны данных квадратов. Квадрат, построенный на гипотенузе этого треугольника, равновелик сумме данных квадратов.

2. Построить квадрат, равновеликий разности двух данных квадратов.

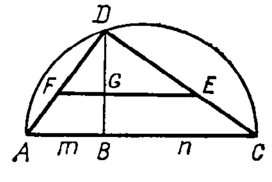
Строим прямоугольный треугольник, у которого гипотенузой была бы сторона большего из данных квадратов, а катетом — сторона меньшего квадрата. Квадрат, построенный на другом катете этого треугольника, равновелик разности данных квадратов.

3. Построить квадрат, площадь которого относится к площади данного квадрата, как $m : n$.

На произвольной прямой (черт. 270) откладываем $AB=m$ и $BC=n$ и на AC как на диаметре описываем полуокружность. Из точки B восставляем перпендикуляр BD до пересечения с окружностью. Проведя хорды AD и DC, получим прямоугольный треугольник, у которого (183)

$$AD^2 : DC^2 = AB : BC = m : n.$$

На катете DC этого треугольника отложим отрезок DE, равный стороне данного квадрата, и проведем $EF \parallel CA$ [1]. Прямая



Черт. 270

[1] Если сторона данного квадрата больше DC, то точки E и F будут лежать на продолжениях катетов DC и DA.

DF есть сторона искомого квадрата, потому что

$$\frac{DF}{DE}=\frac{AD}{DC},$$

откуда

$$\left(\frac{DF}{DE}\right)^2=\left(\frac{AD}{DC}\right)^2;$$

следовательно,

$$DF^2 : DE^2=AD^2 : DC^2=m : n.$$

III. ОТНОШЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПОДОБНЫХ ФИГУР

257. Теорема. **Площади двух треугольников, имеющих по равному углу, относятся как произведения сторон, заключающих эти углы.**

Пусть (черт. 271) в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ углы A и A_1 равны.

Проведя высоты BD и B_1D_1, будем иметь:

$$\frac{\text{пл. } ABC}{\text{пл. } A_1B_1C_1}=\frac{AC\cdot BD}{A_1C_1\cdot B_1D_1}=\frac{AC}{A_1C_1}\cdot\frac{BD}{B_1D_1}.$$

Треугольники ABD и $A_1B_1D_1$ подобны ($A=A_1$ и $D=D_1$), поэтому отношение $BD : B_1D_1$ равно отношению $AB : A_1B_1$; заменив первое вторым, получим:

$$\frac{\text{пл. } ABC}{\text{пл. } A_1B_1C_1}=\frac{AC}{A_1C_1}\cdot\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC\cdot AB}{A_1C_1\cdot A_1B_1}.$$

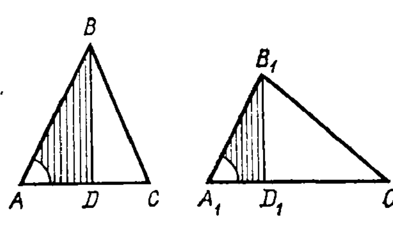
258. Теорема. **Площади подобных треугольников или многоугольников относятся как квадраты сходственных сторон.**

1. Если ABC и $A_1B_1C_1$— два подобных треугольника, то углы одного равны соответственно углам другого; пусть $A=A_1$, $B=B_1$ и $C=C_1$. Применим к ним предыдущую теорему:

$$\frac{\text{пл. } ABC}{\text{пл. } A_1B_1C_1}=\frac{AB\cdot AC}{A_1B_1\cdot A_1C_1}=\frac{AB}{A_1B_1}\cdot\frac{AC}{A_1C_1}. \qquad (1)$$

Но из подобия треугольников следует:

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{BC}{B_1C_1}. \qquad (2)$$



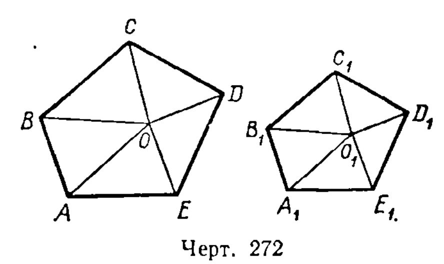
Черт. 271

Поэтому в равенстве (1) мы можем каждое из отношений $\frac{AB}{A_1B_1}$ и $\frac{AC}{A_1C_1}$ заменить любым отношением ряда (2); следовательно,

$$\frac{\text{пл. } ABC}{\text{пл. } A_1B_1C_1}=\left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2=\left(\frac{AC}{A_1C_1}\right)^2=$$
$$=\left(\frac{BC}{B_1C_1}\right)^2=\frac{AB^2}{A_1B_1^2}=\frac{AC^2}{A_1C_1^2}=\frac{BC^2}{B_1C_1^2}.$$

2. Если $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ (черт. 272) — два подобные мно-

гоугольника, то их можно, как мы видели (**165**), разложить на одинаковое число подобных и одинаково расположенных треугольников. Пусть эти треугольники будут ABO и $A_1B_1O_1$, AOE и $A_1O_1E_1$ и т. д. Согласно доказанному в первой части этой теоремы мы получим пропорцию:



Черт. 272

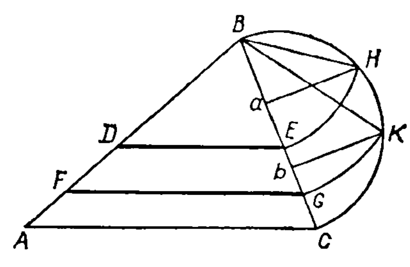
$$\frac{\text{пл. } AOB}{\text{пл. } A_1O_1B_1} = \left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2;$$

$$\frac{\text{пл. } BOC}{\text{пл. } B_1O_1C_1} = \left(\frac{BC}{B_1C_1}\right)^2 \text{ и т. д.}$$

Но из подобия многоугольников следует:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \ldots$$

и потому



Черт. 273

$$\left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2 = \left(\frac{BC}{B_1C_1}\right)^2 = \left(\frac{CD}{C_1D_1}\right)^2 = \ldots.$$

Значит

$$\frac{\text{пл. } AOB}{\text{пл. } A_1O_1B_1} = \frac{\text{пл. } BOC}{\text{пл. } B_1O_1C_1} = \frac{\text{пл. } COD}{\text{пл. } C_1O_1D_1} = \ldots.$$

Откуда (по свойству равных отношений)

$$\frac{\text{пл. } AOB + \text{пл. } BOC + \text{пл. } COD + \ldots}{\text{пл. } A_1O_1B_1 + \text{пл. } B_1O_1C_1 + \text{пл. } C_1O_1D_1 + \ldots} = \frac{\text{пл. } ABCDE}{\text{пл. } A_1B_1C_1D_1E_1} = \frac{AB^2}{A_1B_1^2}.$$

Следствие. **Площади правильных одноименных многоугольников относятся как квадраты сторон, или квадраты радиусов, или квадраты апофем (213).**

259. Задача. Разделить данный треугольник на m равновеликих частей прямыми, параллельными его стороне.

Пусть, например, требуется разделить $\triangle ABC$ (черт. 273) на три равновеликие части прямыми, параллельными основанию AC. Предположим, что искомые прямые будут DE и FG. Очевидно, что если мы найдем отрезки BE и BG, то затем определятся и прямые DE и FG. Треугольники BDE, BFG и BAC подобны; поэтому

$$\frac{\text{пл. } BDE}{\text{пл. } BAC} = \frac{BE^2}{BC^2} \text{ и } \frac{\text{пл. } BFG}{\text{пл. } BAC} = \frac{BG^2}{BC^2}.$$

Но

$$\frac{\text{пл. } BDE}{\text{пл. } BAC} = \frac{1}{3} \text{ и } \frac{\text{пл. } BFG}{\text{пл. } BAC} = \frac{2}{3}.$$

Следовательно,

$$\frac{BE^2}{BC^2}=\frac{1}{3} \text{ и } \frac{BG^2}{BC^2}=\frac{2}{3}.$$

Откуда

$$BE=\sqrt{\frac{1}{3}BC^2}=\sqrt{\frac{1}{3}BC\cdot BC}$$

и

$$BG=\sqrt{\frac{2}{3}BC^2}=\sqrt{\frac{2}{3}BC\cdot BC}.$$

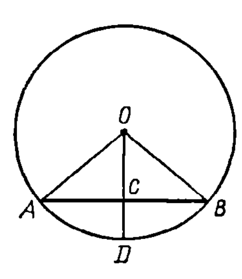
Из этих выражений видим, что BE есть средняя пропорциональная между BC и $\frac{1}{3}BC$, а BG есть средняя пропорциональная между BC и $\frac{2}{3}BC$ (206, 4). Поэтому построение можно выполнить так: разделим BC на три равные части в точках a и b; опишем на BC полуокружность; из a и b восставим к BC перпендикуляры aH и bK. Хорды HB и BK будут искомыми средними пропорциональными: первая — между всем диаметром BC и его третьей частью Ba, вторая — между BC и Bb, т. е. между BC и $\frac{2}{3}BC$ (180). Остается отложить эти хорды на BC от точки B; тогда получим искомые точки E и G.

Подобным образом можно разделить треугольник на какое угодно иное число равновеликих частей.

IV. ПЛОЩАДЬ КРУГА И ЕГО ЧАСТЕЙ

260. Лемма. **При неограниченном удвоении числа сторон правильного вписанного многоугольника сторона его может сделаться как угодно малой.**

Пусть n есть число сторон правильного вписанного многоугольника и p — его периметр; тогда длина одной стороны этого многоугольника выразится дробью p/n. При неограниченном удвоении числа сторон многоугольника знаменатель этой дроби будет, очевидно, возрастать беспредельно, а числитель, т. е. p, хотя и будет возрастать, но не беспредельно (так как периметр всякого вписанного выпуклого многоугольника остается меньшим периметра любого описанного многоугольника). Если же в какой-нибудь дроби знаменатель увеличивается беспредельно, а числитель остается меньшим некоторой постоянной величины, то дробь эта может сделаться как угодно малой. Значит, то же самое можно сказать о стороне правильного вписанного многоугольника: при безграничном удвоении числа сторон она может сделаться меньше любой данной длины.



Черт. 274

261. Следствие. Пусть (черт. 274) AB есть сторона правильного вписанного многоугольника, OA — радиус и OC — апофема. Из $\triangle OAC$ находим (45):

$$OA-OC<AC,$$

т. е.

$$OA - OC < {}^{1}/_{2}\, AB.$$

Но при неограниченном удвоении числа сторон правильного вписанного многоугольника сторона его, как мы сейчас доказали, может сделаться как угодно малой; значит, то же самое можно сказать и о разности $OA - OC$. Таким образом, при неограниченном удвоении числа сторон правильного вписанного многоугольника разность между радиусом и апофемой может сделаться как угодно малой. Это же можно высказать другими словами так: при неограниченном удвоении числа сторон правильного вписанного многоугольника предел, к которому стремится апофема, есть радиус.

262. Нахождение площади круга. Впишем в круг, радиус которого обозначим R, какой-нибудь правильный многоугольник. Пусть

площадь этого многоугольника будет q,
периметр » » » p
и апофема » » » a.

Мы видели (249), что между этими величинами есть такая зависимость:

$$q = \frac{1}{2} pa.$$

Вообразим теперь, что число сторон этого многоугольника неограниченно удваивается. Тогда периметр p и апофема a (следовательно, и площадь q) будут все увеличиваться, причем периметр будет стремиться к пределу, принимаемому за длину C окружности, а апофема будет стремиться к пределу, равному радиусу R круга. Из этого следует, что площадь многоугольника, увеличиваясь при удвоении числа сторон, будет стремиться к пределу, равному ${}^{1}/_{2}\, CR$. Предел этот принимается за численную величину площади круга. Таким образом, обозначив площадь круга буквой K, можем написать:

$$K = \frac{1}{2} CR,$$

т. е. **площадь круга равна половине произведения длины окружности на радиус.**

Так как $C = 2\pi R$, то

$$K = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R = \pi R^2,$$

т. е. **площадь круга равна квадрату радиуса, умноженному на отношение длины окружности к диаметру.**

263. Следствие. **Площади кругов относятся как квадраты радиусов или диаметров.**

Действительно, если K и K_1 будут площади двух кругов, а R и R_1 — их радиусы, то

$$K = \pi R^2 \text{ и } K_1 = \pi R_1^2.$$

Откуда

$$\frac{K}{K_1}=\frac{\pi R^2}{\pi R_1^2}=\frac{R^2}{R_1^2}=\frac{4R^2}{4R_1^2}=\frac{(2R)^2}{(2R_1)^2}.$$

264. Задача 1. **Вычислить площадь круга, окружность которого равна 2 м.**

Для этого предварительно находим радиус R из уравнения

$$2\pi R=2,$$

откуда

$$R=\frac{1}{\pi}=0{,}3183\ldots$$

Затем определим площадь круга:

$$K=\pi R^2=\pi\left(\frac{1}{\pi}\right)^2=\frac{1}{\pi}=0{,}3183\ldots \text{ кв. м.}$$

Задача 2. **Превратить данный круг в квадрат** (т. е. построить квадрат, равновеликий данному кругу).

Эта задача, известная под названием квадратуры круга, не может быть решена при помощи циркуля и линейки. Действительно, если обозначим буквой x сторону искомого квадрата, а буквой R радиус круга, по получим уравнение

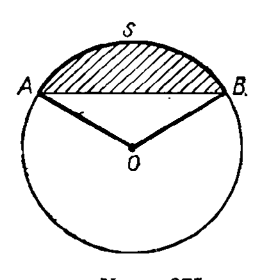
$$x^2=\pi R^2,$$

откуда

$$\pi R : x = x : R,$$

т. е. x есть средняя пропорциональная между полуокружностью и радиусом. Следовательно, если известна прямая, которая равна длине полуокружности, то легко построить квадрат, равновеликий данному кругу, и обратно, если известна сторона квадрата, равновеликого кругу, то можно построить прямую, равную по длине полуокружности. Но с помощью циркуля и линейки нельзя построить прямую, которая в точности равнялась бы длине полуокружности (см. сноску в задаче 326); следовательно, нельзя в точности решить задачу о превращении круга в квадрат. Приближенное же решение можно выполнить, если предварительно найти приближенную длину полуокружности и затем построить среднюю пропорциональную между этой длиной и радиусом.

265. Теорема. **Площадь сектора равна произведению его дуги на половину радиуса.**



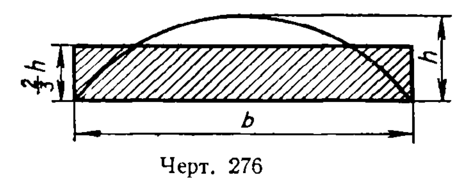
Черт. 275

Пусть дуга AB (черт. 275) сектора AOB содержит $n°$. Очевидно, что площадь сектора, дуга которого содержит 1°, составляет 1/360 часть площади круга, т.е. она равна $\frac{\pi R^2}{360}$. Следовательно, площадь S сектора, дуга которого содержит $n°$, равна:

$$S=\frac{\pi R^2 n}{360}=\frac{\pi R n}{180}\cdot\frac{R}{2}.$$

Так как дробь $\frac{\pi R n}{180}$ выражает длину дуги AB (234), то, обозначив ее буквой s, получим:

$$S = s \cdot \frac{R}{2}.$$



Черт. 276

266. Площадь сегмента. Для нахождения площади сегмента, ограниченного дугой s и хордой AB (черт. 275), надо отдельно вычислить площадь сектора $AOBs$ и площадь $\triangle AOB$ и из первой вычесть вторую.

Впрочем, когда градусное измерение дуги s невелико, площадь сегмента можно вычислять по следующей приближенной формуле (мы ее приводим без доказательства):

$$\text{площадь сегмента} = \frac{2}{3} bh,$$

где b есть основание сегмента (черт. 276), а h — его высота (обыкновенно называемая стрелкой сегмента). Доказано, что погрешность результата вычисления, получаемого по этой приближенной формуле, тем меньше, чем меньше отношение $h : b$, так, если h меньше $1/9\ b$ (что бывает тогда, когда дуга s содержит меньше 50°), то погрешность оказывается меньше 1% площади [1].

Значительно более точные результаты дает более сложная формула:

$$\text{площадь сегмента} = \frac{2}{3} bh + \frac{h^2}{2b}.$$

Формулой этой можно пользоваться для всех сегментов, меньших полукруга; ошибка никогда не достигает 1% [2] (см. задачу 344, с. 164).

УПРАЖНЕНИЯ

Доказать теоремы

330. В параллелограмме расстояния любой точки диагонали от двух прилежащих сторон обратно пропорциональны этим сторонам.

331. Площадь трапеции равна произведению одной из непараллельных сторон на перпендикуляр, опущенный из середины другой непараллельной стороны на первую.

332. Два четырехугольника равновелики, если у них равны соответственно диагонали и угол между ними.

333. Если площади двух треугольников, прилежащих к основаниям трапеции и образуемых пересечением его диагоналей, равны соответственно p^2 и q^2, то площадь всей трапеции равна $(p+q)^2$.

334. Площадь правильного вписанного шестиугольника равна 3/4 площади правильного описанного шестиугольника.

335. В четырехугольнике $ABCD$ через середину диагонали BD проведена прямая, параллельная другой диагонали AC; эта прямая пересекает сторону AD в точке E. Доказать, что прямая CE делит четырехугольник пополам.

---

[1] Принятие площади сегмента, равной $2/3\ bh$, равносильно допущению, что сегмент ограничен дугой параболы, а не окружности.

[2] См.: Dr. Hess Adolf. Planimetrie zum Gebrauche an technischen Mittelschulen. Berlin, 1920.

336. Если медианы треугольника взять за стороны другого треугольника, то площадь последнего равна 3/4 площади первого.

337. В круге с центром O проведена хорда AB. На радиусе OA, как на диаметре, описана окружность. Доказать, что площади двух сегментов, отсекаемых хордой AB от обоих кругов, относятся как 4 : 1.

Задачи на вычисление

338. Вычислить площадь прямоугольной трапеции, у которой один из углов равен 60°, зная или оба основания, или одно основание и высоту, или одно основание и боковую сторону, наклонную к основанию.

339. Вычислить площадь равностороннего треугольника по высоте h.

340. Даны основания трапеции B и b и ее высота H. Вычислить высоту треугольника, образованного продолжением непараллельных сторон трапеции до взаимного пересечения.

341. Составить формулу для площади правильного вписанного 12-угольника в зависимости от радиуса круга.

342. В треугольник вписан другой треугольник, вершины которого делят пополам стороны первого треугольника; в другой треугольник вписан подобным же образом третий; в третий — четвертый и т. д. без конца. Найти предел суммы площадей этих треугольников.

343. По трем данным сторонам a, b и c треугольника вычислить радиус r круга, вписанного в этот треугольник.

Указание. Если S есть площадь треугольника, то легко усмотреть, что

$$S = {}^1/_2 ar + {}^1/_2 br + \frac{1}{2} cr = pr,$$

где p означает полупериметр треугольника. С другой стороны, площадь S выражается формулой, выведенной в задаче 254. Отсюда можно получить формулу для r.

344. Вычислить стрелку (высоту) и площадь сегмента в зависимости от радиуса r круга, если центральный угол, соответствующий сегменту, содержит 60°. Вычисление это произвести трояким путем: 1) посредством вычитания из площади сектора площади треугольника; 2) по первой сокращенной формуле, указанной в § 266 этой книги, и 3) по второй сокращенной формуле, указанной там же. Сравнить результаты вычисления друг с другом с целью определить абсолютную и относительную погрешности приближенных результатов.

Решение.

$$b = r,$$

$$h = r - \frac{1}{2r}\sqrt{3} = \frac{1}{2} r\,(2 - \sqrt{3}) = 0{,}1340\ r;$$

1) площадь $p_1 = \frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = r^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 0{,}0906\ r^2;$

2) » $p_2 = \frac{2}{3} bh = \frac{2}{3} \cdot r \cdot 0{,}1340\ r = 0{,}0893\ r^2;$

3) » $p_3 = \frac{2}{3} bh + \frac{h^2}{2b} = 0{,}0893\ r^2 + 0{,}0012\ r^2 = 0{,}0905\ r^2.$

Абсолютная погрешность

площади $p_2 = 0{,}0906\ r^2 - 0{,}0893\ r^2 = 0{,}0013\ r^2;$

» $p_3 = 0{,}0906\ r^2 - 0{,}0905\ r^2 = 0{,}0001\ r^2.$

Относительная погрешность (т. е. отношение абсолютной погрешности к точной величине)

для площади $p_2 = \frac{p_1 - p_2}{p_1} = \frac{0{,}0013 r^2}{0{,}0906 r^2} = 0{,}014 = 1{,}4\%;$

» $p_3 = \frac{p_1 - p_3}{p_1} = \frac{0{,}0001 r^2}{0{,}0906 r^2} = 0{,}001 = 0{,}1\%.$

Таким образом, результат, вычисленный по первой приближенной формуле, меньше истинного результата (приблизительно) на 1,4%, а результат, вычисленный по второй приближенной формуле, меньше истинного на 0,1%.

345. 1. Зная основание b сегмента и высоту его (стрелку) h, вычислить радиус r круга.

Указание. Из прямоугольного треугольника, у которого гипотенуза есть r, один катет $b/2$, а другой $r-h$, находим уравнение:

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + (r-h)^2 = r^2,$$

из которого легко определить r.

2. Вычислить диаметр круга, если известно, что при основании сегмента, равном 67,2 см, стрелка его есть 12,8 см (см. предыдущее указание).

Задачи на построение

346. Разделить треугольник прямыми, проходящими через вершину, на три части, площади которых относились бы как $m : n : p$.

347. Разделить пополам треугольник прямой, проходящей через данную точку его стороны.

348. Найти внутри треугольника такую точку, чтобы прямые, соединяющие ее с вершинами треугольника, делили его на три равновеликие части.

349. То же — на три части в отношении 2 : 3 : 4 (или вообще $m : n : p$).

350. Разделить параллелограмм на три равновеликие части прямыми, исходящими из вершины его.

351. Разделить параллелограмм на две части в отношении $m : n$ прямой, проходящей через данную точку.

352. Разделить параллелограмм на три равновеликие части прямыми, параллельными диагонали.

353. Разделить площадь треугольника в среднем и крайнем отношении прямой, параллельной основанию.

354. Разделить треугольник на три равновеликие части прямыми, перпендикулярными к основанию.

355. Разделить круг на 2, на 3,. . . равновеликие части концентрическими окружностями.

356. Разделить пополам трапецию прямой, параллельной основаниям. (Указание. Продолжив непараллельные стороны до взаимного пересечения, взять за неизвестную величину расстояние конца искомой линии до вершины треугольника; составить пропорции, исходя из площадей подобных треугольников. . .)

357. Данный прямоугольник превратить в другой равновеликий прямоугольник с данным основанием.

358. Построить квадрат, равновеликий 2/3 данного квадрата.

359. Превратить квадрат в равновеликий прямоугольник, у которого сумма или разность d двух смежных сторон дана.

360. Построить круг, равновеликий кольцу, заключенному между двумя данными концентрическими окружностями.

361. Построить треугольник, подобный одному и равновеликий другому из двух данных треугольников.

362. Данный треугольник превратить в равновеликий равносторонний (посредством приложения алгебры к геометрии).

363. В данный круг вписать прямоугольник с данной площадью m^2 (посредством приложения алгебры к геометрии).

364. В данный треугольник вписать прямоугольник с данной площадью m^2 (приложением алгебры к геометрии; исследовать).

Некоторые задачи прикладного характера

365. Три селения A, B и C не лежат на одной прямой. Указать на чертеже, как надо провести прямолинейную дорогу из A, чтобы кратчайшие расстояния от нее до B и C были одинаковы.

366. Два селения лежат в стороне от железной дороги на неодинаковых от нее расстояниях. Указать построением, где должна быть устроена железнодорожная станция, чтобы она была одинаково удалена от обоих селений (два случая: когда оба селения расположены по одну сторону от дороги и когда они лежат по разные стороны от нее).

367. Земля и Марс обращаются вокруг Солнца по круговым (почти) путям на расстоянии 150 и 228 млн. км. Во сколько раз при наибольшем приближении к Земле Марс ближе к нам, чем при наибольшем его удалении от нас?

368. Найти диаметр круглого обрубка, из которого была вытесана шестиугольная шашка торцовой мостовой со стороной 7 см. (Шашки вытесываются наибольшего размера.)

369. Две точки земного шара, лежащие на одном меридиане на расстоянии в 120° одна от другой, соединены прямой линией. Определить наибольшую глубину залегания этой линии под поверхностью Земли. Радиус земного шара равен 6400 км.

370. Для изготовления ведра свернули кусок листового железа в виде цилиндра, диаметр основания которого равен 21,5 см. Какой длины этот кусок, если на кромки пришлось добавить 22 мм?

371. Вагонное колесо имеет диаметр 1,15 м. Сколько оборотов оно делает на протяжении 1 км?

372. Как можно вычислить радиус земного шара, исходя из того, что метр составляет одну 40-миллионную долю длины меридиана?

373. Чтобы поднять ведро от уровня воды в колодце до краев сруба, вал сделал 12 оборотов. Как велико расстояние от верхнего края сруба до уровня воды в колодце, если диаметр вала 50 см?

374. На сколько удлинился бы экватор глобуса, если бы его радиус был на 1 см больше? На сколько удлинился бы при таком же увеличении радиуса земной экватор?

375. Если бы мы могли обойти земной шар по экватору, то макушка нашей головы описала бы более длинный путь, чем каждая точка ступней. Как велика эта разница, если рост человека равен 1,75 м?

376. Радиус железнодорожного закругления 1280 м, длина дуги закругления 107 м. Сколько градусов в дуге закругления?

377. Когда полярный исследователь Нансен достиг 86°44′ с. ш., сколько километров оставалось ему пройти до полюса?

378. Два шкива диаметром 75 см каждый насажены на валы, оси которых удалены одна от другой на 2 м. Шкивы соединены бесконечным ремнем, могущим вращать их в одну сторону. Как велика длина ремня?

379. Огород имеет форму трапеции, основания которой 12 м и 18 м, а расстояние между основаниями 6 м. Сколько (по весу) семян требуется, чтобы засадить его капустой, если на каждый квадратный метр их потребуется по 1/2 г?

380. Для обтяжки колеса телеги диаметром 0,71 м надо приготовить шину. Какой длины должна быть полоса шинного железа, если на сварку концов ее надо добавить 5 см?

381. Паровоз двигается со скоростью 60 км в час. Сколько оборотов в минуту делает его колесо, диаметр которого 1,5 м?

382. Для остекления уличного шестиугольного фонаря требуется 6 одинаковых кусков стекла в виде трапеции, у которой параллельные стороны 230 мм и 120 мм, а высота 375 мм. Сколько квадратных метров стекла понадобится на 100 таких фонарей, если 5% надо считать на обрезки?

383. Деревянные колодцы делаются либо квадратные, либо шестиугольные. У квадратных каждая сторона «в свету» (т. е. внутреннего сечения) делается в 2 арш., у шестиугольных — в 1 арш. У какого колодца площадь внутреннего сечения больше?

384. Альбрехт Дюрер, знаменитый немецкий художник XVI столетия, считал круг равновеликим квадрату, у которого диагональ равна 3/4 диаметра круга. Как велика погрешность в этом допущении Дюрера?

385. Ствол дерева имеет в обхвате 2180 мм. Найти его диаметр и площадь поперечного сечения.

386. Из куска листового железа длиной 150 см и шириной 82 см можно изготовить круговой цилиндр двояким путем, сгибая его по длине или по ширине. Вычислить площадь поперечного сечения цилиндра в том и другом случае, если на скрепление краев идет по 3,5 см.

387. Площадь кругового сектора с центральным углом в 50° равна 3 кв. м. Вычислить радиус круга.

388. В цилиндре паровой машины пар давит на поршень с силой 5 кг на квадратный сантиметр. Диаметр поршня равен 35,6 см. Как велико давление пара на поршень?

389. Диаметр Солнца виден с Земли под углом зрения в 32′. Диаметр Луны, заслонившей Солнце во время затмения, виден под углом 30′. Какую долю обычного света получают от Солнца во время затмения те места Земли, в которых наблюдается такое «кольцеобразное» затмение?

390. Мост перекинут через ров в виде дуги окружности, диаметр которой равен 35 м. Как велика стрелка сегмента, образуемого этой дугой, если основание его (ширина рва) составляет 20 м?

391. Садовник для построения прямого угла на земле пользовался бечевой, на которой сделаны три узла (см. замечание к § 182). Расстояние между первым и вторым узлами равно 65 см, а между вторым и третьем — 72 см. Какой длины должен быть свободный конец бечевы? Различить два случая: когда свободный конец больше 72 см и когда он меньше 65 см.

392. По сторонам прямого угла двигаются, начав одновременно движение от вершины, два тела со скоростями 3 м и 4 м в секунду. Через сколько секунд расстояние между этими телами сделается равным 80 м?

393. Две силы $P=108$ кг и $Q=195$ кг действуют на материальную точку под прямым углом. Построить и вычислить их равнодействующую.

394. Вычислить радиус горизонта, видимого с вершины Эйфелевой башни, высота которой 300 м (радиус земного шара принять равным 6400 км).

У к а з а н и е. Искомый радиус есть катет прямоугольного треугольника, у которого другой катет есть радиус Земли, а гипотенуза равна сумме радиуса с высотой башни.

395. Лестница длиной 12,5 м приставлена к стене так, что расстояние нижнего конца лестницы от стены равно 3,5 м. На какой высоте от земли упирается в стену верхний конец лестницы?

396. Поперечное сечение двускатной крыши имеет вид равнобедренного треугольника, у которого основание равно 12,6 м, а боковые стороны по 8,5 м. Какова высота крыши?

397. Нужно вытесать из бревна брус с прямоугольным поперечным сечением 15·21 см. Какой (наименьшей) толщины бревно годится для этого?

398. Как велика дальность горизонта для авиатора, поднявшегося на 2 км над морем, если радиус земного шара считать в 6400 км? (**У к а з а н и е.** См. задачу 394.)

399. В каменном своде «стрелка» свода (высота соответствующего сегмента) должна составлять не менее 1/12 пролета. Найти наибольший радиус дуги свода, если пролет равен 8 м.

400. Если между двумя точками земной поверхности по хорде меридиана (или какого бы ни было «большого круга») прорыть туннель длиной 100 км, то какова будет наибольшая глубина залегания туннеля под земной поверхностью (радиус земного шара принять равным 6400 км)?

401. Вычислить радиус кривизны вогнутого сферического зеркала шириной 10 см и глубиной 0,6 мм.

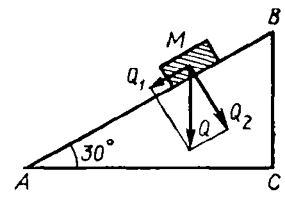
402. Толщина симметрично двояковыпуклого стекла равна 1,6 мм, ширина 3,6 см. Вычислить радиус кривизны.

403. Вычислить площадь сегмента, если радиус круга есть r, а центральный угол, соответствующий сегменту, равен: 1) 90°, 2) 45°, 3) 60° и 4) 30°.

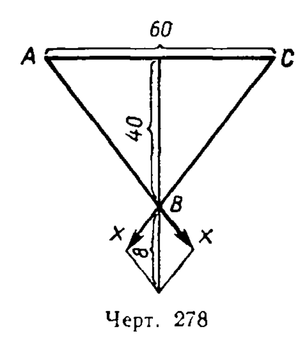
404. Длина проволоки, поддерживающей мачту радиостанции, в 3 раза больше проекции этой проволоки на горизонтальную поверхность земли. Вычислить угол наклона проволоки.

(З а м е ч а н и е. Проекцией наклонной линии на горизонтальную плоскость, пересекающую эту линию, называется расстояние от нижнего конца линии до основания перпендикуляра, опущенного из верхнего конца ее на горизонтальную плоскость.)

405. Полотно железной дороги имеет подъем в 4° на протяжении 4 км. Вычислить проекцию полотна на горизонтальную плоскость на этом участке.



Черт. 277



Черт. 278

406. На наклонную плоскость AB (черт. 277), образующую с горизонтальной плоскостью AC угол в 30°, положено тело M, весящее 150 кг. Найти величину силы, увлекающей тело вниз по наклонной плоскости (надо предварительно разложить силу $Q=150$ кг на две силы Q_1 и Q_2).

407. Фабричная труба правильной 8-угольной формы имеет внутри круглый дымовой ход. Вычислить площадь поперечного сечения трубы, если сторона 8-угольника равна 0,8 м, а радиус дымового хода — 0,7 м.

408. Гребец направляет лодку перпендикулярно к берегам реки. Определить с помощью чертежа направление и вычислить скорость движения лодки, если река течет со скоростью 60 см в секунду, а скорость движения лодки в спокойно стоящей воде равна 80 см в секунду.

409. Определить на чертеже направление и вычислить величину скорости, с которой надо двигать лодку, чтобы, уносимая течением, она двигалась поперек реки со скоростью 100 см в секунду, если скорость течения реки равна 60 см в секунду.

410. На одну точку тела действуют три силы: в 10, 10 и 20 единиц. Силы эти расположены в одной плоскости, причем каждые две соседние силы образуют угол в 120°. Найти направление и величину равнодействующей.

411. Бечевка ABC (черт. 278) укреплена концами в двух точках A и C, расположенных на одинаковой высоте на расстоянии $AC=60$ см. К середине бечевки подвешен груз в 8 кг, отчего точка провеса опустилась на 40 см ниже горизонтальной прямой AC. Вычислить силу x, с которой каждый конец бечевки тянет точку укрепления.

412. На чертеже заданы точки приложения и величины (в виде отрезков прямых) двух параллельных сил P и Q, действующих на две данные точки тела в одну сторону. Найти (построением) точку приложения и величину равнодействующей.

413. То же, но силы P и Q направлены в противоположные стороны.

414. Две предыдущие задачи решить вычислением, если $P=5$ кг, $Q=3$ кг и расстояние между точками приложения сил P и Q равно 20 см.

415. На балку, подпертую в концах, подвешен в данной точке груз, вес которого изображен на чертеже (по направлению и величине) отрезком прямой P. Определить (построением) давления, которые этот груз производит на точки опоры балки.

416. На чертеже даны две параллельные силы P и $Q (Q>P)$, действующие на две точки тела в одном направлении. Требуется силу P разложить построением на две параллельные силы, действующие в противоположных направлениях, причем одна из этих сил должна быть Q.

417. То же вычислением, если $P=70$ кг, $Q=100$ кг и расстояние между точками приложения сил P и Q равно 40 см.

418. На данной прямой AB и на ее продолжении определить (построением) точки C и C_1 (точка C между A и B, точка C_1 за B), которые одинаково освещаются двумя источниками света, поставленными на концах прямой, если известно, что яркость источника A в 4 раза превосходит яркость источника B и что степень освещения расходящимися лучами обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света.

ОТДЕЛ ШЕСТОЙ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ ОКРУЖНОСТИ И ПЛОЩАДИ КРУГА НА ОСНОВАНИИ АКСИОМЫ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Две леммы и основная теорема

267. Изложим здесь другое определение длины окружности, свободное от понятия о пределе [1].

Прежде докажем следующие две леммы:

Лемма 1. **Разность между периметрами правильных одноименных многоугольников: одного, описанного около данной окружности, и другого, вписанного в нее, может быть сделана как угодно малой, если число сторон этих многоугольников неограниченно удваивается.**

Пусть P есть периметр какого-нибудь правильного многоугольника, описанного около данной окружности, и p — периметр правильного одноименного многоугольника, вписанного в ту же окружность. Тогда можем написать пропорцию (по свойству подобных многоугольников):

$$P : p = R : a,$$

где R есть радиус окружности и a — апофема вписанного многоугольника. Из этой пропорции составим производную:

$$(P-p) : p = (R-a) : a.$$

Если все величины, входящие в эту пропорцию, выражены числами, то мы можем применить к ней свойство числовых пропорций и написать:

$$(P-p)a = (R-a)p.$$

При неограниченном удвоении числа сторон многоугольников разность $R-a$ по доказанному раньше (261) может сделаться как угодно малой, периметр p, увеличиваясь, остается всегда меньше периметра любого описанного многоугольника. Из этого следует, что правая часть последнего равенства может сделаться как угодно малой; значит, то же самое можно сказать и о левой части равенства, т. е. о произведении $(P-p)a$. Так как в этом произведении множитель a увеличивается (приближаясь к радиусу), то для того, чтобы произведение могло сделаться как угодно малым, необходимо, чтобы множимое, т. е. разность $P-p$, могло сделаться как угодно малым; что и требовалось доказать.

Лемма 2. **Среди всех многоугольников, вписанных в данную окружность, не существует такого, у которого периметр был бы наибольшим из всех, а среди всех многоугольников, описанных около данной окружности, не существует такого, у которого периметр был бы наименьшим из всех.**

Действительно, какой бы вписанный многоугольник мы ни взяли (правильный или неправильный — все равно), мы всегда можем построить другой вписанный многоугольник с большим периметром, например, удвоив число сторон первого, поместив между каждыми двумя соседними вершинами его по одной дополнительной вершине.

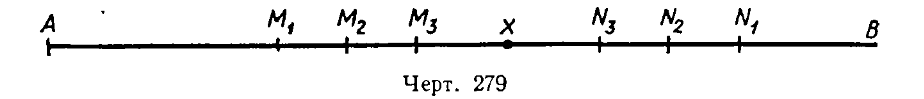
---

[1] Изложено согласно брошюрам, изданным в 1916 г. Педагогическим музеем военно-учебных заведений (Петроград) под названием: Богомолов С. А. Аксиома непрерывности, как основание для определения длины окружности, площади круга, поверхностей и объемов круглых тел; Киселев А. П. О тех вопросах элементарной геометрии, которые решаются обыкновенно с помощью пределов.

Равным образом, какой бы описанный многоугольник мы ни взяли, мы можем построить другой описанный многоугольник с меньшим периметром, например, срезав углы первого многоугольника проведением новых касательных.

268. Теорема. **Для каждой данной окружности существует такой отрезок прямой и только один, который больше периметра любого многоугольника, вписанного в эту окружность, но меньше периметра любого многоугольника, описанного около этой же окружности.**

Вообразим, что в данную окружность мы вписали всевозможные многоугольники. Допустим, далее, что для каждого многоугольника мы нашли его периметр и полученные периметры отложили на какой-нибудь прямой AB от одной и той же начальной точки A (черт. 279) в одном и том же направлении. Пусть один периметр выразится



Черт. 279

отрезком AM_1, другой — отрезком AM_2, третий — отрезком AM_3 и т. д., так что точки M_1, M_2, M_3,. . . (и вообще точки M) будут концы этих периметров. Подобно этому вообразим, что около данной окружности мы описали всевозможные многоугольники, для каждого нашли его периметр и полученные периметры отложили на той же прямой AB от той же точки A и в том же направлении. Пусть точки N_1, N_2, N_3, ... (и вообще точки N) будут концы этих периметров. Полученные таким образом точки M и точки N (число тех и других надо представлять себе бесконечным) обладают в своем расположении на прямой следующими тремя свойствами:

1. Каждая точка M лежит левее каждой точки N, так как периметр всякого вписанного многоугольника[1] меньше периметра всякого описанного.

2. Из точек M не существует крайней правой точки, из точек N не существует крайней левой точки, так как если бы существовала крайняя правая точка M, то это означало бы, что существует наибольший периметр вписанных многоугольников, а если бы была крайняя левая точка N, то существовал бы наименьший из периметров описанных многоугольников, а это, как мы видели, невозможно.

3. Какую бы малую длину мы ни задали, можно найти такие две точки, одну из точек M, другую из точек N, что расстояние между ними будет меньше заданной длины. Это сделается ясным, если примем во внимание, что среди всевозможных многоугольников, которые мы предполагали вписанными и описанными, должны находиться также и правильные многоугольники, а для таких многоугольников, как мы видели (лемма 1), разность $P—p$ может быть сделана как угодно малой и, следовательно, она может быть сделана меньшей данной малой длины.

Приняв во внимание эти три свойства точек M и N, мы можем утверждать, что на прямой AB существует некоторая точка x и только одна, которая отделяет область всех точек M от области всех точек N. Чтобы сделать наглядным существование такой точки, прибегнем к следующей иллюстрации Жюля Танери[2].

---

[1] Конечно, выпуклого, как это предполагается везде.

[2] См.: Таннегу Jules. Leсons d'algebre et d'analyse, p. 14.

Вообразим, что все точки M и вся та часть прямой, которая расположена налево от любой точки M, окрашена в один цвет, например в зеленый, а все точки N и вся та часть прямой AB, которая лежит направо от любой точки N, окрашена в другой цвет, например в красный. Тогда окажется, что две окрашенные части прямой не могут, во-первых, налегать одна на другую, так как все точки M лежат налево от любой из точек N; во-вторых, они не могут и соприкасаться друг с другом вплотную, так как если бы это случилось, то из зеленых точек была бы крайняя правая, а из красных точек была бы крайняя левая, что противоречит свойству 2-му точек M и N. Таким образом, между окрашенными частями прямой должна существовать некоторая неокрашенная граница, отделяющая зеленую часть от красной. Эта граница не может быть отрезком прямой, как бы мал он ни был, так как если бы такой отрезок существовал, то расстояние между одной из точек M и одной из точек N не могло бы сделаться меньшим этого отрезка, что противоречит свойству 3-му точек M и N. Граница не может быть и пустым протяжением, так как прямую линию мы представляем себе (согласно аксиоме Дедекинда) непрерывный. Остается одно возможное допущение: границей между зеленой и красной частями прямой служит одна неокрашенная точка, расположенная правее всех зеленых точек и левее всех красных. Пусть это будет точка x. Тогда отрезок Ax и будет тот, о котором говорится в теореме, т. е. он больше периметра любого вписанного многоугольника, но меньше периметра любого описанного.

Теперь понятно будет следующее определение:

За длину окружности принимается такой отрезок прямой, который больше периметра любого выпуклого многоугольника, вписанного в эту окружность, но меньше периметра любого многоугольника, описанного около нее.

Все сказанное здесь о длине окружности может быть повторено и о длине любой части окружности.

СТЕРЕОМЕТРИЯ

ОТДЕЛ ПЕРВЫЙ

ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ

I. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ПЛОСКОСТИ

275[1]. Аксиомы плоскости. Укажем следующие свойства плоскости, которые мы примем без доказательства:

1. Плоскость есть поверхность незамкнутая.

2. Всякая плоскость делит пространство на две части, расположенные по разные стороны от плоскости.

3. Если прямая имеет с плоскостью только одну общую точку, то она ее п е р е с е к а е т, переходя из части пространства, лежащей по одну сторону от плоскости, в часть пространства, лежащую по другую ее сторону.

4. Отрезок прямой, соединяющий две точки пространства, расположенные по разные стороны от плоскости, пересекает эту плоскость, тогда как отрезок прямой, соединяющий две точки, расположенные по одну сторону от плоскости, не пересекает ее.

5. Через всякую точку и через всякую прямую можно провести бесчисленное множество плоскостей.

6. Всякая прямая, проведенная на плоскости, разделяет ее на две части (они называются *полуплоскостями*).

7. Пересечение двух плоскостей есть прямая линия.

8. Плоскость можно вращать вокруг любой прямой, лежащей на ней.

9. Через всякие три точки можно провести плоскость (и только одну, если эти точки не лежат на одной прямой).

276. С л е д с т в и я. Из последней аксиомы можно вывести следующие следствия.

1. **Через прямую и точку вне ее можно провести плоскость (и только одну),** потому что точка вне прямой вместе с какими-нибудь двумя точками этой прямой составляют три точки, через которые можно провести плоскость (и притом одну).

2. **Через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость (и только одну),** потому что, взяв точку пересечения и еще по одной точке на каждой прямой, мы будем иметь три точки, через которые можно провести плоскость (и притом одну).

3. **Через две параллельные прямые можно провести плоскость (и только одну),** потому что параллельные прямые по определению

---

[1] § 269—274 в этом издании выпущены; нумерация следующих параграфов оставлена без изменения.

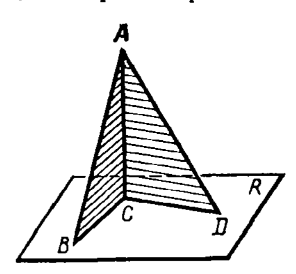
лежат в одной плоскости; эта плоскость единственная, так как через одну из параллельных и какую-нибудь точку другой можно провести не более одной плоскости.

II. ПЕРПЕНДИКУЛЯР К ПЛОСКОСТИ И НАКЛОННЫЕ К НЕЙ

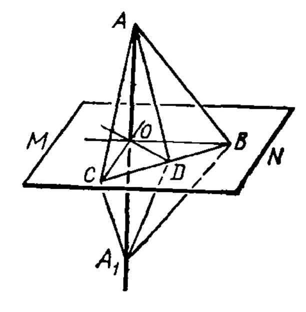
277. Предварительное замечание. Вообразим фигуру (черт. 280), составленную из двух прямоугольных треугольников ABC и ACD, имеющих общий катет AC и расположенных таким образом, что их катеты CB и CD образуют некоторый угол. Поставим такую фигуру на какую-нибудь плоскость R таким образом, чтобы катеты CB и CD поместились на этой плоскости. Мы получим тогда такое расположение прямой (AC) и плоскости (R), при котором эта прямая, пересекаясь с плоскостью, оказывается перпендикулярной к двум прямым (к CD и к CB), проведенным на этой плоскости через точку пересечения. Докажем, что такое расположение прямой и плоскости обладает следующим свойством.

278. Теорема. **Если (AA_1, черт. 281), пересекающаяся с плоскостью (MN), перпендикулярна к двум прямым (OB и OC), проведенным на этой плоскости через точку пересечения (O), то она перпендикулярна и ко всякой третьей прямой (OD), проведенной на плоскости через ту же точку пересечения.**

Отложим произвольной длины, но равные отрезки OA и OA_1 и проведем на плоскости какую-нибудь прямую, которая пересекала бы три прямые, исходящие из O, в каких-нибудь точках C, D и B. Эти точки соединим с точками A и A_1. Мы получим тогда несколько треугольников. Рассмотрим их в такой последовательности. Сначала возьмем треугольники ACB и A_1CB; они равны, так как у них CB — общая сторона, $AC=A_1C$, как наклонные к прямой AA_1, одинаково удаленные от основания перпендикуляра OC; по той же причине $AB=A_1B$. Из равенства этих треугольников следует, что $\angle ABC = \angle A_1BC$. После этого перейдем к треугольникам ADB и A_1DB; они равны, так как у них DB — общая сторона, $AB=A_1B$ и $\angle ABD = \angle A_1BD$. Из равенства этих треугольников выводим, что $AD=A_1D$. Теперь возьмем треугольники AOD и A_1OD; они равны, так как имеют соответственно равные стороны. Из их равенства выводим, что $\angle AOD = \angle A_1OD$; следовательно, $AA_1 \perp OD$.

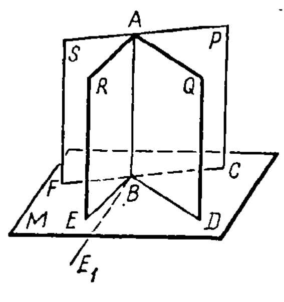


Черт. 280



Черт. 281

279. Определение. Прямая называется *перпендикулярной к плоскости*, если она, пересекаясь с этой плоскостью, образует прямые углы со всеми прямыми, проведенными на плоскости через точку пересечения. В этом



Черт. 282

случае говорят также, что плоскость перпендикулярна к прямой.

Прямая, пересекающаяся с плоскостью, но неперпендикулярная к ней, называется *наклонной*. Точка пересечения прямой с плоскостью называется *основанием* перпендикуляра или наклонной.

280. Теорема. **Если через одну и ту же точку (B) прямой (AB, черт. 282) проведем в пространстве сколько угодно перпендикуляров (BC, BD, BE, . . .) к этой прямой, то все они лежат в одной и той же плоскости.**

Для доказательства через какие-нибудь два из перпендикуляров, например через BC и BD, проведем плоскость M, которая согласно предыдущей теореме будет перпендикулярна к AB. Вообразим теперь, что какой-нибудь из прочих перпендикуляров, например BE, проведенный в плоскости R, не лежит в плоскости M. Тогда пересечением плоскостей R и M должна быть некоторая прямая, не сливающаяся с BE (например, BE_1), и следовательно в плоскости R должны существовать два перпендикуляра к AB, проходящие через точку B: один BE, а другой BE_1 (278); так как это невозможно, то нельзя допустить, чтобы какой-нибудь из проведенных нами перпендикуляров не лежал в плоскости M; значит, все они лежат в этой плоскости, которая, как мы говорили, перпендикулярна к AB.

281. Следствие. Если какой-нибудь прямой угол (например, ABC, черт. 282) будем вращать вокруг одной стороны (AB), как около оси, то другая сторона его (BC) опишет плоскость (M), перпендикулярную к оси вращения.

282. Замечание. Из планиметрии мы знаем, что из всякой точки прямой можно восставить к этой прямой перпендикуляр и только один и также изо всякой точки вне прямой можно опустить на эту прямую перпендикуляр и только один. Подобными же свойствами обладают плоскость и прямая, взаимно перпендикулярные, а именно:

1. **Через всякую точку пространства можно провести плоскость (и только одну), перпендикулярную к данной прямой.**

2. **Через всякую точку пространства можно провести перпендикуляр (и только один) к данной плоскости.**

Для упрощения и сокращения нашего курса геометрии можно эти истины принять без доказательства.

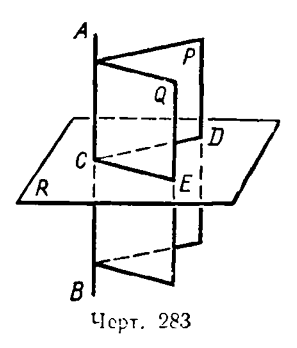
Впрочем, доказательство мы изложим в следующих двух параграфах.

283. Теорема. **Через всякую точку пространства можно провести плоскость, перпендикулярную к данной прямой, и притом только одну.**

Рассмотрим отдельно два случая: 1) точка, через которую требуется провести перпендикулярную плоскость, лежит на данной прямой; 2) эта точка лежит вне данной прямой.

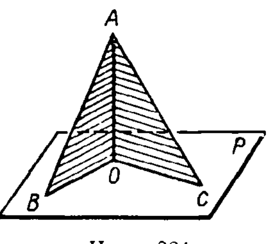
1. Пусть C будет точка, взятая на данной прямой AB (черт. 283). Проведем через прямую какие-нибудь две плоскости P и Q и на них возьмем прямые CD и

CE, перпендикулярные к AB. Через эти две пересекающиеся прямые проведем плоскость R. Эта плоскость перпендикулярна к AB в точке C, потому что две ее прямые перпендикулярны к AB.



Черт. 283

Допустим теперь, что через точку C можно провести еще другую плоскость, перпендикулярную к AB. Обозначим ее R_1 (на чертеже она не указана). Эта плоскость должна пересечься с плоскостью P по такой прямой, которая, во-первых, проходит через C и, во-вторых, перпендикулярна к AB. Но на плоскости P существует только одна такая прямая, именно прямая CD, которую мы раньше провели; значит, плоскость R_1 должна пересечься с P по той же прямой CD, по которой с ней пересекается и плоскость R. Так же убедимся, что плоскость R_1 должна пересечься с плоскостью Q по той же прямой CE, по которой с ней пересекается плоскость R. Следовательно плоскость R_1 должна проходить через те же пересекающиеся прямые CD и CE, через которые проведена нами плоскость R. Но через две пересекающиеся прямые можно провести только одну плоскость; значит, плоскости R и R_1 должны слиться в одну.



Черт. 284

2. Пусть D будет точка, взятая в н е д а н н о й п р я м о й AB (черт. 283). Проведем через D и AB плоскость P и через AB еще какую-нибудь плоскость Q; на первой опустим на AB из точки D перпендикуляр DC, а на второй восставим к AB из точки C перпендикуляр CE. Плоскость R, проходящая через DC и CE, будет плоскостью, перпендикулярной к AB и проведенной через точку D (278).

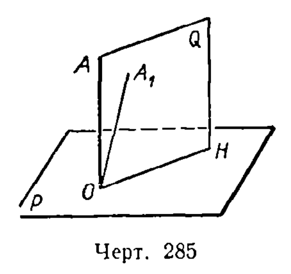
Предположим теперь, что через точку D можно провести еще другую плоскость R_1, перпендикулярную к AB. Эта плоскость должна пересечься с плоскостью P по такой прямой, которая, во-первых, проходит через D и, во-вторых, перпендикулярна к AB. Но на плоскости P существует только одна такая прямая, именно перпендикуляр CD, который мы провели раньше; значит, плоскость R_1 должна пересечься с плоскостью P по той же прямой DC, по которой с ней пересекается и плоскость R. Но тогда плоскость R_1 может пересечься с плоскостью Q только по прямой CE, так как это единственная прямая плоскости Q, проходящая через C и перпендикулярная к AB. Таким образом, плоскость R_1, проходя через те же две пересекающиеся прямые DC и CE, через которые проведена плоскость R, должна слиться с этой плоскостью.

284. Т е о р е м а. **Через всякую точку пространства можно провести перпендикуляр к данной плоскости и притом только один.**

И в этой теореме мы рассмотрим отдельно два случая: 1) точка O, через которую требуется провести перпендикуляр, лежит на данной плоскости и 2) эта точка лежит вне плоскости.

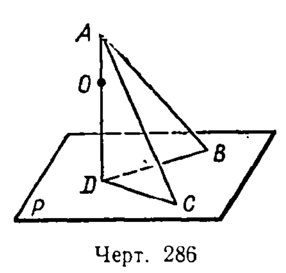
1. Пусть точка O лежит н а п л о с к о с т и P (черт. 284). Возьмем ту фигуру, состоящую из двух прямоугольных треугольников, о которой мы говорили в § 277, и поместим ее на плоскости P таким образом, чтобы общая вершина прямых углов совместилась с точкой O, а катеты OB и OC расположились на плоскости P. Тогда общий катет OA и будет перпендикуляром к P, проведенным через точку O.

Предположим теперь, что, кроме найденного нами перпендикуляра OA, существует еще другой перпендикуляр OA_1 (черт. 285), проведенный к плоскости P через ту же точку O. Проведем через прямые OA и OA_1 плоскость Q; пусть эта плоскость пересечется с плоскостью P по прямой OH. Тогда углы AOH и A_1OH должны оказаться оба прямые. Но это невозможно, так как один из этих углов составляет часть другого. Значит, другого перпендикуляра через точку O к плоскости P провести нельзя.



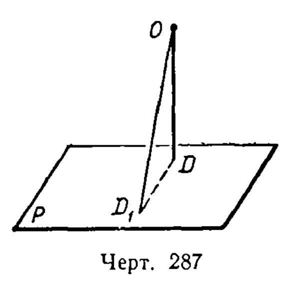
Черт. 285

2. Пусть теперь точка O лежит вне плоскости P (черт. 286). Поместим снова ту же фигуру на плоскость P таким образом, чтобы катеты BD и CD расположились где-нибудь на плоскости P. Затем станем двигать фигуру по плоскости P до тех пор, пока общий катет AD (или его продолжение) не пройдет через точку O. Мы тогда будем иметь перпендикуляр AD к плоскости P, проходящий через точку O.



Черт. 286

Допустим, что, кроме найденного нами перпендикуляра OD, можно опустить из точки O на плоскость P еще другой перпендикуляр OD_1 (черт. 287). Тогда, соединив точки D и D_1 прямой, мы получим $\triangle ODD_1$, у которого два угла прямые. Так как это невозможно, то другого перпендикуляра из точки O на плоскость P опустить нельзя.



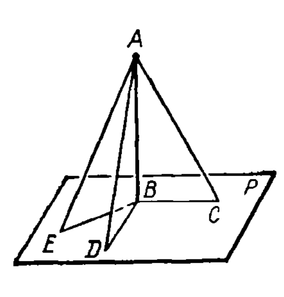
Черт. 287

285. Сравнительная длина перпендикуляра и наклонных. Когда из одной точки A (черт. 288) проведены к плоскости (и только до нее) перпендикуляр AB и наклонная AC, условимся называть *проекцией* наклонной на плоскость прямую BC, проведенную между основаниями перпендикуляра и наклонной.

Теорема. **Если из одной и той же точки** (A, черт. 288), **взятой вне плоскости** (P), **проведены до этой плоскости перпендикуляр к ней** (AB) **и какие-нибудь наклонные** (AC, AD, AE, ...), **то:**

1) **две наклонные, имеющие равные проекции, равны;**

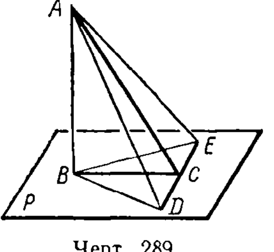
2) **из двух наклонных та больше, которой проекция больше.**



Черт. 288

Вращая прямоугольные треугольники ABC и ABD вокруг катета AB, мы можем совместить их плоскости с плоскостью $\triangle ABE$. Тогда все наклонные будут лежать в одной плоскости с перпендикуляром, а все проекции расположатся на одной прямой. Таким образом, доказываемые теоремы приводятся к аналогичным теоремам планиметрии.

З а м е ч а н и е. Так как AB есть катет прямоугольного треугольника, а каждая из наклонных AC, AD, AE, . . . есть гипотенуза, то перпендикуляр AB **к о р о ч е   в с я к о й   н а к л о н н о й**; поэтому длина перпендикуляра, опущенного из точки A на плоскость (черт. 288), принимается за меру р а с с т о я н и я точки A от плоскости P.



Черт. 289

286. О б р а т н ы е   т е о р е м ы. **Если из одной и той же точки, взятой вне плоскости, проведены до этой плоскости перпендикуляр к ней и какие-нибудь наклонные, то: 1) равные наклонные имеют равные проекции и 2) из двух проекций та больше, которая соответствует большей наклонной.**

Доказательство (от противного) предоставляем самим учащимся.

Приведем еще следующую теорему о перпендикулярах, которая понадобится нам впоследствии.

287. Т е о р е м а. **Прямая** (DE, черт. 289), **проведенная на плоскости** (P) **через основание наклонной** (AC) **перпендикулярно к ее проекции** (BC), **перпендикулярна и к самой наклонной.**

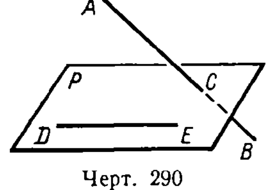
Отложим произвольные, но равные отрезки CD и CE и соединим точки A и B с C и D. Тогда будем иметь: $BD=BE$, как наклонные к прямой DE, одинаково удаленные от основания перпендикуляра BC; $AD=AE$, как наклонные к плоскости P, имеющие равные проекции BD и BE. Вследствие этого $\triangle ADE$ есть равнобедренный и потому его медиана AC перпендикулярна к основанию DE (34) [1].

III. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ

Параллельные прямые

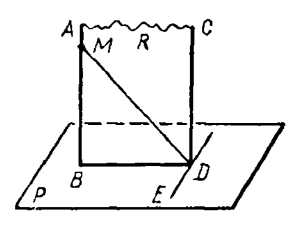
288. Предварительное замечание. Две прямые могут быть расположены в пространстве так, что через них нельзя провести плоскости. Возьмем, например (черт. 290), две такие прямые AB и DE, из которых одна пересекает некоторую плоскость P, а другая лежит на ней, но не проходит через точку пересечения C. Через такие две прямые нельзя провести плоскости, потому что в противном случае через прямую DE и точку C проходили бы две различные плоскости: одна P, пересекающая прямую AB, и другая, содержащая ее; а это невозможно (276).

Две прямые, не лежащие в одной плоскости, конечно, не пересекаются, сколько бы их ни продолжали; однако их не называют параллельными, оставляя это название для таких прямых, которые, н а х о д я с ь   в   о д н о й



Черт. 290

[1] В некоторых курсах геометрии теорема эта (или несколько измененная) носит название т е о р е м ы   т р е х   п е р п е н д и к у л я р о в. Действительно, в ней говорится о связи, соединяющей следующие три перпендикуляра: 1) AB к плоскости P, 2) BC к прямой DE и 3) AC к той же прямой DE.



Черт. 291

плоскости, не пересекаются, сколько бы их ни продолжали.

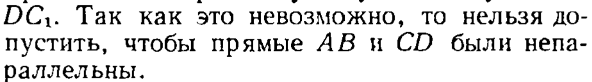
Две прямые, не лежащие в одной плоскости, называются *скрещивающимися*.

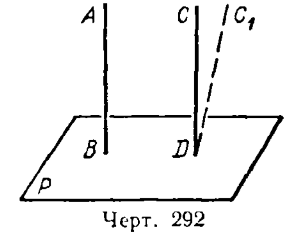
289. Теорема. **Если плоскость** (*P*, черт. 291) **перпендикулярна к одной из параллельных прямых** (*AB*), **то она перпендикулярна и к другой** (*CD*).

Проведем через *AB* и *CD* плоскость *R* и возьмем ее пересечение *BD* с плоскостью *P*. Так как по условию *AB* перпендикулярна к *P*, то $AB \perp BD$; поэтому и $CD \perp BD$ (74). Проведем на плоскости *P* прямую *DE*, перпендикулярную к *BD*, и возьмем какую-нибудь наклонную *MD*, для которой проекцией служит *BD*. Прямая *ED*, будучи перпендикулярна к проекции *BD*, должна быть перпендикулярной и к наклонной *MD* (287) и, следовательно, перпендикулярна к плоскости (278), значит, и к прямой *CD*. Таким образом, прямая *CD* оказывается перпендикулярной к двум прямым плоскости *P*, именно к *DB* и к *DE*; следовательно, она перпендикулярна к этой плоскости.

290. Обратная теорема (выражающая признак параллельности двух прямых). **Если две прямые** (*AB* и *CD*, черт. 292) **перпендикулярны к одной и той же плоскости** (*P*), **то они параллельны.**

Предположим противное, т. е. что прямые *AB* и *CD* не параллельны. Проведем тогда через точку *D* прямую, параллельную *AB*. При нашем предположении это будет какая-нибудь прямая DC_1, не сливающаяся с *DC*. Согласно прямой теореме линия DC_1 будет перпендикулярна к плоскости. Тогда, следовательно, мы будем иметь два перпендикуляра к плоскости *P*, проходящие через одну и ту же точку: *DC* и DC_1. Так как это невозможно, то нельзя допустить, чтобы прямые *AB* и *CD* были непараллельны.





Черт. 292

291. Теорема. **Если две прямые** (*A* и *B*, черт. 293) **параллельны третьей прямой** (*C*), **то они параллельны между собой.**

Проведем плоскость *P*, перпендикулярную к *C*. Тогда *A* и *B* будут перпендикулярны к этой плоскости (289) и, следовательно, $A \| B$ (290).

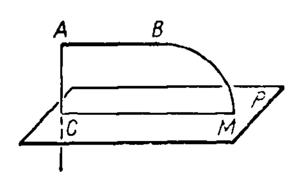
Черт. 293

Прямая и плоскость, параллельные между собой

292. Определение. Плоскость и прямая, не лежащая в этой плоскости, называются *параллельными*, если они не пересекаются, сколько бы их ни продолжали.

Следующие две теоремы выражают два признака параллельности прямой с плоскостью.

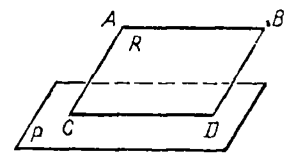
293. Теорема 1. **Если прямая** (AB, черт. 294) **и плоскость** (P) **перпендикулярны к одной и той же прямой** (AC), **то они параллельны.**



Черт. 294

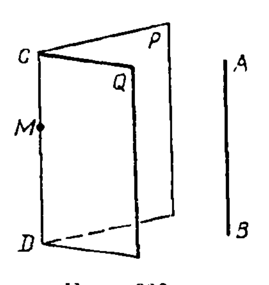
Предположим, что прямая AB пересекается с плоскостью в некоторой точке M; тогда, соединив прямой эту точку с точкой C, в которой плоскость P пересекается с данной прямой, мы будем иметь два перпендикуляра MC и MA на прямую AC из одной точки M, что невозможно; значит, AB не пересекается с P, т. е. AB параллельна P.

Теорема 2. **Если прямая** (AB, черт. 295) **параллельна какой-нибудь прямой** (CD), **проведенной на плоскости** (P), **то она параллельна самой плоскости.**



Черт. 295

Проведем через AB и CD плоскость R и предположим, что прямая AB где-нибудь пересекается с плоскостью P. Тогда точка пересечения, находясь на прямой AB, должна принадлежать также и плоскости R, на которой лежит AB; в то же время точка пересечения, конечно, должна принадлежать и плоскости P. Значит, точка пересечения, находясь и на плоскости R, и на плоскости P, должна лежать на прямой CD, на которой пересекаются эти плоскости; следовательно, прямая AB пересекается с прямой CD. Но это невозможно, так как по условию $AB \parallel CD$. Значит, нельзя допустить, чтобы прямая AB пересекалась с плоскостью P, поэтому $AB \parallel P$.

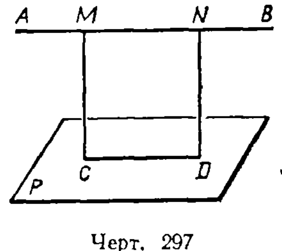


Черт. 296

294. Теорема. **Если плоскость** (R, черт. 295) **проходит через прямую** (AB), **параллельную другой плоскости** (P), **и пересекает эту плоскость, то линия пересечения** (CD) **параллельна первой прямой** (AB). Действительно, во-первых, прямая CD лежит в одной плоскости с AB; во-вторых, эта прямая не может пересечься с AB, потому что в противном случае прямая AB пересекалась бы с плоскостью P, что невозможно.

295. Следствие. **Если прямая** (AB, черт. 296) **параллельна двум пересекающимся плоскостям** (P и Q), **то она параллельна линии их пересечения** (CD).

Вообразим плоскость через AB и какую-нибудь точку M прямой CD. Эта плоскость должна пересечься с P и Q по прямым, параллельным AB и проходящим через M. Но через M можно провести только одну прямую, параллельную AB; значит, два пересечения воображаемой плоскости с плоскостями P и Q должны слиться в одну прямую. Эта прямая, находясь одновременно на плоскости P и на плоскости Q, должна совпадать с прямой CD, по которой плоскости P и Q пересекаются; значит, $CD \parallel AB$.



Черт. 297

296. Т е о р е м а. **Все точки прямой (AB, черт. 297), параллельной плоскости (P), одинаково удалены от этой плоскости.**

Из каких-нибудь точек M и N прямой AB опустим на P перпендикуляры MC и ND. Так как эти перпендикуляры параллельны (290), то через них можно провести плоскость. Эта плоскость пересекается с P по прямой CD, параллельной AB (294); поэтому фигура $MNDC$ есть прямоугольник и, следовательно, $MC = ND$. Но длина перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость, принимается за меру р а с с т о я н и я этой точки от плоскости; значит, любые точки M и N прямой AB одинаково удалены от плоскости P.

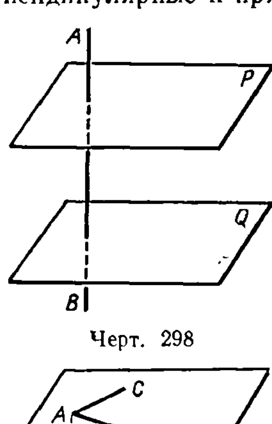
Параллельные плоскости

297. Определение. Две плоскости называются параллельными, если они не пересекаются, сколько бы их ни продолжали.

Следующие две теоремы выражают п р и з н а к и параллельности двух плоскостей.

298. Т е о р е м а 1. **Если две плоскости (P и Q, черт. 298) перпендикулярны к одной и той же прямой (AB), то они параллельны.**

Действительно, если бы плоскости P и Q пересекались, то через всякую точку их пересечения проходили бы две плоскости P и Q, перпендикулярные к прямой AB, что невозможно.



Черт. 298

Т е о р е м а 2. **Если две пересекающиеся прямые (AB и AC, черт. 299) одной плоскости (P) соответственно параллельны двум прямым (A_1B_1 и A_1C_1) другой плоскости (Q), то эти плоскости параллельны.**

Из точки A опустим на плоскость Q перпендикуляр AA_{11} и проведем прямые $A_{11}B_{11}$ и $A_{11}C_{11}$, параллельные прямым A_1B_1 и A_1C_1; эти прямые также параллельны и линиям AB и AC (291). Так как $AA_{11} \perp A_{11}B_{11}$ и $AB \parallel A_{11}B_{11}$, $AA_{11} \perp AB$; также доказывается, что $AA_{11} \perp AC$. Следовательно, $AA_{11} \perp P$ (278). Таким образом, плоскости P и Q перпендикулярны к одной и той же прямой AA_{11}, и потому они параллельны.

Черт. 299

299. Т е о р е м а. **Если две параллельные плоскости (P и Q, черт. 300) пересекаются третьей плоскостью (R), то линии пересечения (AB и CD) параллельны.**

Действительно, во-первых, прямые AB и CD находятся в одной плоскости (R); во-вторых, они не могут пересечься, так как в противном случае пересекались бы также

плоскости P и Q, что противоречит условию.

300. Теорема. **Если прямая** (AB, черт. 301) **перпендикулярна к одной из параллельных плоскостей** (к P), **то она перпендикулярна и к другой** (к Q).

Проведем через прямую AB, продолженную неопределенно, какие-нибудь две плоскости M и N, которые пересекутся с P и Q по параллельным прямым (299): одна по BC и B_1C_1, другая по BD и B_1D_1. Согласно условию прямая AB перпендикулярна к BC и BD, следовательно, она также перпендикулярна к B_1C_1 и B_1D_1, а потому перпендикулярна и к плоскости Q.

301. Теорема. **Отрезки параллельных прямых** (AC и BD, черт. 302), **заключенные между параллельными плоскостями** (P и Q), **равны.**

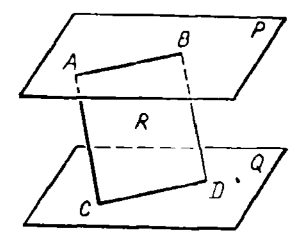
Через параллельные прямые AC и BD проведем плоскость R; она пересечет P и Q по параллельным прямым AB и CD; следовательно, фигура $ABCD$ будет параллелограмм, и потому $AC=BD$.

302. Следствие. **Параллельные плоскости везде одинаково удалены одна от другой,** потому что если параллельные прямые AC и BD (черт. 302) будут перпендикулярны к P, то они также будут перпендикулярны к Q и в то же время равны.

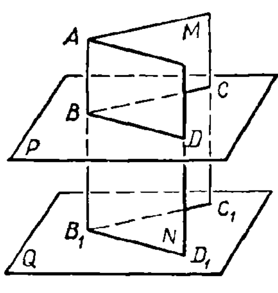
303. Теорема. **Два угла** (BAC и $B_1A_1C_1$, черт. 303) **с соответственно параллельными и одинаково направленными сторонами равны и лежат в параллельных плоскостях** P и Q.

Что плоскости P и Q параллельны, было доказано прежде (298, 2); остается доказать, что углы A и A_1 равны.

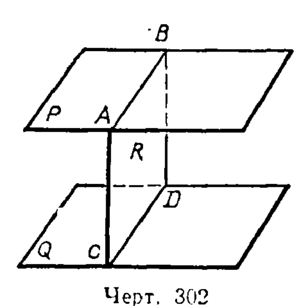
Отложим $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$ и проведем AA_1, BB_1, CC_1, BC и B_1C_1. Так как отрезки AB и A_1B_1 равны и параллельны, то фигура ABB_1A_1 есть параллелограмм (93,2); поэтому отрезки AA_1 и BB_1 равны и параллельны. По той же причине равны и параллельны отрезки AA_1 и CC_1; следовательно, $BB_1 \parallel CC_1$ и $BB_1 = CC_1$. Поэтому $BC=B_1C_1$ и $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$ (по трем сторонам); значит, $\angle A=\angle A_1$.



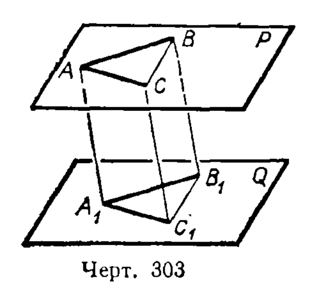
Черт 300



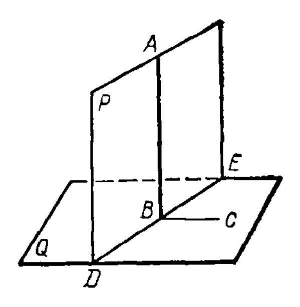
Черт. 301



Черт. 302



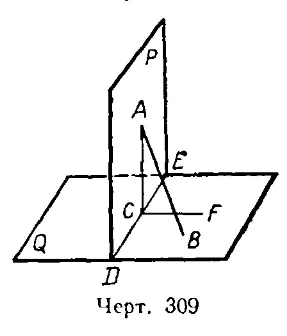
Черт. 303



Черт. 308

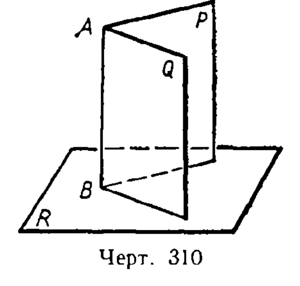
Пусть DE будет линия пересечения плоскостей P и Q. На плоскости Q проведем $BC \perp DE$. Тогда угол ABC будет линейным углом двугранного угла $PDEQ$. Так как прямая AB по условию перпендикулярна к Q, то $AB \perp BC$; значит, угол ABC прямой, а потому и двугранный угол прямой, т. е. плоскость P перпендикулярна к Q.

311. Т е о р е м а. **Если две плоскости** (P и Q, черт. 309) **взаимно перпендикулярны и к одной из них** (к Q) **проведен перпендикуляр** (AB), **имеющий общую точку** (A) **с другой плоскостью** (с P), **то он весь лежит в этой плоскости.**



Черт. 309

Предположим, что AB не лежит в плоскости P (как изображено у нас на чертеже). Пусть DE будет линия пересечения P и Q. На плоскости P проведем $AC \perp DE$, а на плоскости Q проведем $CF \perp DE$. Тогда угол ACF, как линейный угол прямого двугранного угла, будет прямой. Поэтому линия AC, образуя прямые углы с DE и CF, будет перпендикуляром к плоскости Q. Мы будем иметь тогда два перпендикуляра, опущенные из одной и той же точки A на плоскость Q, именно AB и AC. Так как это невозможно, то нельзя допустить, чтобы перпендикуляр AB не лежал в плоскости P.



Черт. 310

312. С л е д с т в и е. **Пересечение** (AB, черт. 310) **двух плоскостей** (P и Q), **перпендикулярных к третьей плоскости** (R), **есть перпендикуляр к этой плоскости.**

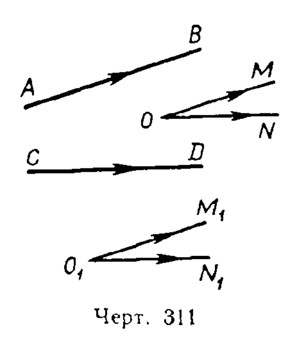
Действительно, если через какую-нибудь точку A линии пересечения вообразим перпендикуляр к плоскости R, то этот перпендикуляр согласно предыдущей теореме должен лежать и в плоскости Q, и в плоскости P, значит, он сольется с AB.

Угол двух скрещивающихся прямых

313. Определение. Углом двух с к р е щ и в а ю щ и х с я прямых (AB и CD, черт. 311), для которых дано положение и направление [1], называется угол (MON), который получится, если из произвольной точки пространства (O) проведем полупрямые (OM и ON), соответственно параллельные данным прямым (AB и CD) и одинаково с ними направленные.

[1] Надо мысленно представить, что на черт. 311 прямая CD лежит в плоскости чертежа, а прямая AB пересекает эту плоскость.

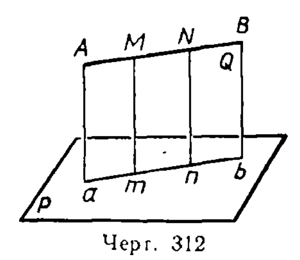
Величина этого угла не зависит от положения точки O, так как если построим указанным путем угол $M_1O_1N_1$ при какой-нибудь другой точке O_1, то $MON = M_1O_1N_1$, потому что эти углы имеют соответственно параллельные и одинаково направленные стороны.



Черт. 311

Угол, образуемый прямой с плоскостью

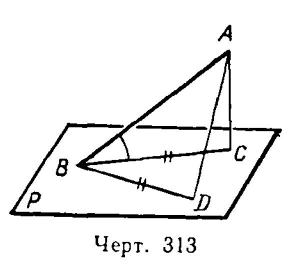
314. Проекция прямой на плоскость. Мы говорили ранее (285), что когда из одной точки проведены к плоскости перпендикуляр и наклонная, то проекцией этой наклонной на плоскость называется прямая, соединяющая основание перпендикуляра с основанием наклонной. Дадим теперь более общее определение проекции.



Черт. 312

1. Проекцией какой-нибудь точки на данную плоскость (например, точки M на плоскость P, черт. 312) называется основание (m) перпендикуляра, опущенного на эту плоскость из взятой точки.

2. Проекцией какой-нибудь линии на плоскость называется геометрическое место проекций всех точек этой линии.



Черт. 313

В частности, если проектируемая линия есть прямая (например, AB, черт. 312), то проекция ее на плоскость (P) есть также прямая. В самом деле, если мы через прямую AB и перпендикуляр Mm, опущенный на плоскость проекций из какой-нибудь одной точки M этой прямой, проведем плоскость Q, то эта плоскость должна быть перпендикулярной к плоскости P (**310**); поэтому перпендикуляр, опущенный на плоскость P из любой точки прямой AB (например, из точки N), должен лежать в этой плоскости Q (**311**) и, следовательно, проекции всех точек прямой AB должны лежать на прямой ab, по которой пересекаются плоскости P и Q. Обратно, всякая точка этой прямой есть проекция какой-нибудь точки прямой AB, так как перпендикуляр, восставленный из любой точки прямой ab, лежит на плоскости Q и, следовательно, пересекается с AB в некоторой точке. Таким образом, прямая ab представляет собой геометрическое место проекций всех точек данной прямой AB и, следовательно, есть ее проекция.

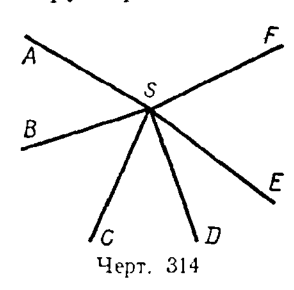
315. Угол прямой с плоскостью. *Углом прямой* (AB, черт. 313) *с плоскостью* (P) в том случае, когда прямая наклонна к плоскости, называется угол (ABC), составленный этой прямой с ее проекцией на плоскость.

Угол этот обладает тем свойством, что он есть наименьший из всех углов, которые наклонная образует с прямыми, проведенными на

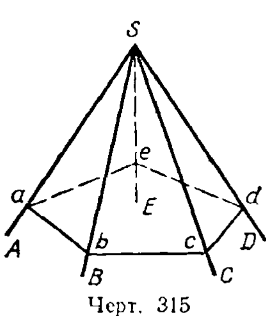
плоскости P через основание наклонной. Докажем, например, что $\angle ABC$ меньше $\angle ABD$. Для этого отложим $BD=BC$ и соединим D с A. У треугольников ABC и ABD две стороны одного равны соответственно двум сторонам другого, но третьи стороны не равны, а именно $AD>AC$ (285). Вследствие этого $\angle ABD$ больше $\angle ABC$ (47,2).

V. МНОГОГРАННЫЕ УГЛЫ

316. Определения. Возьмем несколько углов (черт. 314) ASB, BSC, CSD, . . ., которые, примыкая последовательно один к другому, расположены в одной плоскости вокруг общей вершины S. Повернем плоскость угла ASB вокруг общей стороны SB так, чтобы эта плоскость составила некоторый двугранный угол с плоскостью BSC. Затем, не изменяя получившегося двугранного угла, повернем его вокруг прямой SC так, чтобы плоскость BSC составила некоторый двугранный угол с плоскостью CSD. Продолжаем такое последовательное вращение вокруг каждой общей стороны. Если при этом последняя сторона SF совместится с первой стороной SA, то образуется фигура (черт. 315), которая называется *многогранным углом*. Углы ASB, BSC, . . . называются *плоскими* углами или *гранями*, стороны их SA, SB, . . . называются *ребрами*, а общая вершина S — *вершиной* многогранного угла. Каждому ребру соответствует свой двугранный угол; поэтому в многогранном угле столько двугранных углов и столько плоских, сколько в нем всех ребер. Наименьшее число граней в многогранном угле три; такой угол называется т р е х г р а н н ы м. Могут быть углы четырехгранные, пятигранные и т. д.



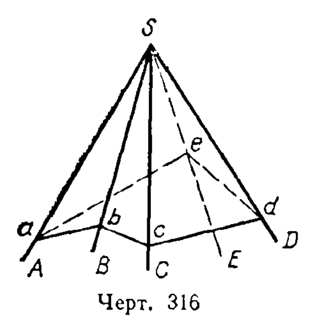
Черт. 314



Черт. 315

Многогранный угол обозначается или одной буквой S, поставленной у вершины, или же рядом букв $SABCDE$, из которых первая обозначает вершину, а прочие — ребра по порядку их расположения.

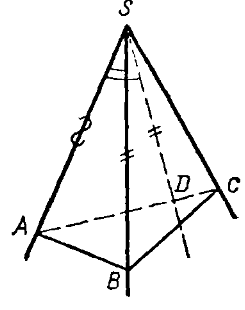
Многогранный угол называется *выпуклым*, если он весь расположен по одну сторону от каждой своей грани. Таков, например, угол, изображенный на черт. 315. Наоборот, угол на черт. 316 нельзя назвать выпуклым, так как он расположен по обе стороны от грани ASB или от грани BSC.



Черт. 316

Если все грани многогранного угла пересечем плоскостью, то в сечении образуется многоугольник ($abcde$). В выпуклом угле этот многоугольник тоже выпуклый.

Мы будем рассматривать только выпуклые многогранные углы.



Черт. 317

317. Теорема. **Во всяком трехгранном угле каждый плоский угол меньше суммы двух других плоских углов, но больше их разности.** Пусть в угле $SABC$ (черт. 317) наибольший из плоских углов есть ASC. Отложим на этом угле часть ASD, равную ASB, и проведем какую-нибудь прямую AC, пересекающую SD в некоторой точке D. Отложим $SB=SD$. Соединив B с A и C, получим $\triangle ACB$, в котором

$$AD+DC<AB+BC.$$

Треугольники ASD и ASB равны, так как они содержат по равному углу, заключенному между равными сторонами; следовательно, $AD=AB$. Поэтому в выведенном неравенстве можно отбросить части AD и AB:

$$DC<BC.$$

Теперь замечаем, что у треугольников SCD и SCB две стороны одного равны двум сторонам другого, а третьи стороны неравны; в таком случае против большей из этих сторон лежит больший угол (**47**, 2); значит,

$$\text{угол } CSD<\text{угла } CSB.$$

Приложив к левой части этого неравенства угол ASD, а к правой равный ему угол ASB, получим то неравенство, которое требовалось доказать:

$$\text{угол } ASC<\text{угла } CSB+\text{угол } ASB.$$

Мы доказали, что даже наибольший плоский угол меньше суммы двух других углов. Значит, первая часть теоремы доказана. Для доказательства второй части отнимем от обеих частей последнего неравенства по углу ASB или по углу CSB, получим:

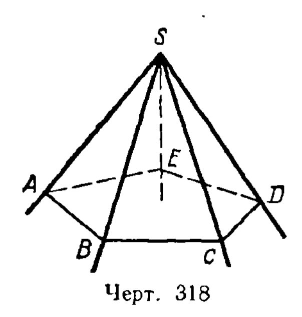
$$\text{угол } ASC-\text{угол } ASB<\text{угла } CSB;$$
$$\text{угол } ASC-\text{угол } CSB<\text{угла } ASB.$$

Рассматривая эти неравенства справа налево и приняв во внимание, что угол ASC, наибольший из трех углов, конечно, больше разности двух других углов, мы приходим к заключению, что в трехгранном угле каждый плоский угол больше разности двух других углов.

318. Теорема. **Во всяком выпуклом многогранном угле сумма всех плоских углов меньше** $4d$.

Пересечем грани (черт. 318) выпуклого угла $SABCDE$ какой-нибудь плоскостью[1]; от этого в сечении получим выпуклый n-угольник

[1] Мы принимаем без доказательства (хотя оно и существует), что всегда возможно провести такую секущую плоскость, которая пересекает в с е р е б р а многогранного угла, если только этот угол в ы п у к л ы й. Доказательство (довольно сложное) имеется в книге: R o u c h é et C o m b e r o u s s e. Traité de geométrie, ч. 2, с. 32.



Черт. 318

$ABCDE$. Применяя теорему предыдущего параграфа к каждому из трехгранных углов, образовавшихся при точках A, B, C, D и E, находим: $ABC < ABS + SBC$; $BCD < BCS + SCD$... Сложим почленно все эти неравенства. Тогда в левой части получим сумму всех углов многоугольника $ABCDE$, которая равна $2dn—4d$ (79), а в правой — сумму углов треугольников ASB, BSC, ..., кроме тех углов, которые лежат при вершине S. Обозначив сумму этих последних углов буквой x, мы получим после сложения:

$$2dn - 4d < 2dn - x.$$

Так как в разностях $2dn—4d$ и $2dn—x$ уменьшаемые одинаковы, то, чтобы первая разность была меньше второй, необходимо, чтобы вычитаемое $4d$ было больше вычитаемого x; значит, $4d > x$, т. е. $x < 4d$.

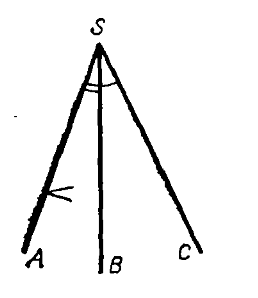
VI. ПРОСТЕЙШИЕ СЛУЧАИ РАВЕНСТВА ТРЕХГРАННЫХ УГЛОВ

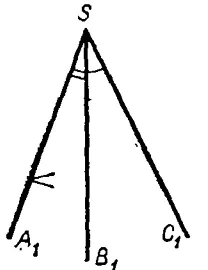
319. Теоремы. **Трехгранные углы равны, если они имеют:**

1. **По равному двугранному углу, заключенному между двумя соответственно равными и одинаково расположенными плоскими углами,** или

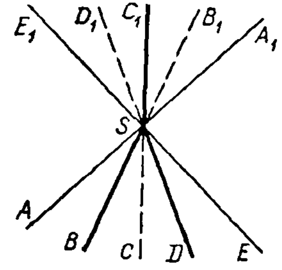
2. **По равному плоскому углу, заключенному между двумя соответственно равными и одинаково расположенными двугранными углами.**

1) Пусть S и S_1— два трехгранных угла (черт. 319), у которых $\angle ASB = \angle A_1S_1B_1$, $\angle ASC = \angle A_1S_1C_1$ и двугранный угол AS равен двугранному углу A_1S_1. Вложим угол S_1 в угол S так, чтобы у них совпали точка S_1 с S, прямая S_1A_1 с SA и плоскость $A_1S_1B_1$ с ASB. Тогда ребро S_1B_1 пойдет по SB (по равенству углов $A_1S_1B_1$ и ASB), плоскость $A_1S_1C_1$ пойдет по ASC (по равенству двугранных углов) и ребро S_1C_1 пойдет по SC (по равенству углов $A_1S_1C_1$ и ASC). Таким образом, трехгранные углы совместятся всеми своими ребрами, т. е. они будут равны.





Черт. 319



Черт. 320

2) Второй признак доказывается вложением, подобно первому [1].

320. Симметричные многогранные углы. Как известно, вертикальные углы равны, если речь идет об углах, образованных прямыми или плоскостями. Посмотрим, применима ли эта истина к углам многогранным.

Продолжим (черт. 320) все ребра угла $SABDEC$ за вершину; тогда образуем другой многогранный угол $SA_1B_1D_1E_1C_1$, который можно назвать в е р т и к а л ь н ы м по отношению к первому углу. Нетрудно видеть, что у обоих углов равны соответственно и плоские углы, и двугранные, но те и другие расположены в о б р а т н о м п о р я д к е. Действительно, если мы вообразим наблюдателя, который смотрит извне многогранного угла на его вершину, то ребра SA, SB, SD, SE, SC будут казаться ему расположенными в направлении против движения часовой стрелки, тогда как, смотря на угол $SA_1B_1D_1E_1C_1$, он увидит ребра SA_1, SB_1, . . . расположенными по движению часовой стрелки.

Многогранные углы с соответственно равными плоскими и двугранными углами, но расположенными в обратном порядке, вообще не могут совместиться при вложении; значит, они не равны. Такие углы называются *симметричными* (относительно вершины S).

ОТДЕЛ ВТОРОЙ

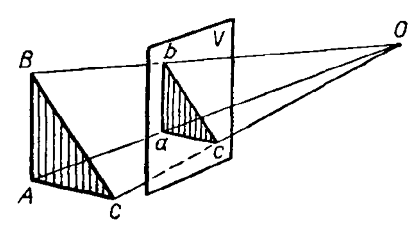
НАЧАЛА ПРОЕКЦИОННОГО ЧЕРЧЕНИЯ

I. ПОНЯТИЕ О РАЗНЫХ РОДАХ ПРОЕКЦИЙ

321. Проекционное черчение имеет целью указать способы, посредством которых можно изобразить на плоскости любое геометрическое тело таким образом, чтобы по чертежу можно было составить точное представление о величине, форме и взаимном расположении всех частей изображенного тела.

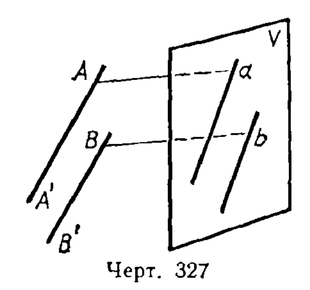
Различают проекции трех родов.

1. Ц е н т р а л ь н а я (или п е р с п е к т и в н а я) п р о е к ц и я. Положим, мы желаем изобразить (черт. 321) на плоскости V (обыкновенно она называется *картинной* плоскостью или *экраном*) какую-нибудь фигуру, например $\triangle ABC$ (помещенный где-нибудь за экраном), в таком виде, в каком он представляется нашему глазу, если будем смотреть на него из точки O (называемой *центром пер-*



Черт. 321

[1] Есть еще два признака равенства, а именно трехгранные углы равны, если они имеют: 3) по три соответственно равных и одинаково расположенных плоских угла или 4) по три соответственно равных и одинаково расположенных двугранных угла. Доказательство этих признаков мы опускаем.



Черт. 327

Действительно, если отрезок AB не параллелен плоскости V, то AB и ab при продолжении пересекаются, образуя некоторый угол, а стороны угла рассекаются рядом параллельных прямых на пропорциональные части (173), и потому $ac : cb = AC : CB$. Если же отрезок AB параллелен плоскости V, то $ac = AC$ и $cb = CB$, и, следовательно, тогда тоже $ac : cb = AC : CB$.

6. **Проекции параллельных прямых параллельны** (черт. 327).

Если $AA' \parallel BB'$, то стороны углов aAA' и bBB' соответственно параллельны, и потому проектирующие плоскости также параллельны (**303**), а параллельные плоскости пересекаются третьей плоскостью (V) по параллельным прямым (**299**).

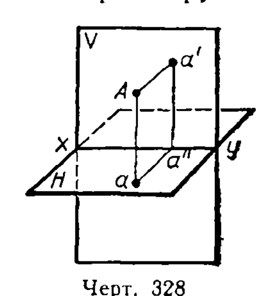
7. **Проекции пересекающихся прямых пересекаются между собой,** так как у них будет общая точка, именно проекция точки пересечения данных прямых.

III. НАЧАЛА ОРТОГОНАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

324. Изображение точки с помощью проекций на две плоскости. Вообразим две плоскости проекций: горизонтальную H и вертикальную V, пересекающиеся под прямым углом по прямой xy, которую мы будем называть осью проекций (черт. 328). Плоскости эти образуют четыре двугранных угла, из которых мы для простоты будем рассматривать только один, именно передний верхний. Положим, что внутри этого угла расположена какая-нибудь точка A. Опустим из нее перпендикуляр на плоскости H и V. Тогда мы получим на этих плоскостях ортогональные проекции точки A, именно a есть горизонтальная проекция, a' — вертикальная.

Обыкновенно каждая из этих проекций обозначается малой буквой одного наименования с той большой буквой, которая обозначает самое точку, причем буква, обозначающая вертикальную проекцию, берется со знаком наверху.

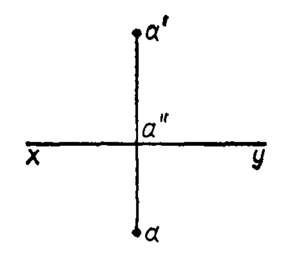
Перпендикуляры, с помощью которых получаются проекции точки, называются *проектирующими перпендикулярами*: Aa — горизонтально-проектирующий, Aa' — вертикально-проектирующий.



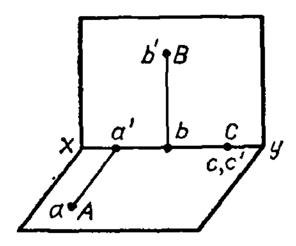
Черт. 328

Если через эти перпендикуляры проведем плоскость, то она должна быть перпендикулярной и к H, и к V (**310**), следовательно, должна быть перпендикулярна и к оси xy (**312**), и потому прямые aa'' и $a'a''$, по которым эта плоскость пересекается с H и V, будут перпендикулярны к xy; следовательно, они образуют линейный угол двугранного угла, составленного плоскостями H и V, и так как этот двугранный угол прямой, то и линейный его угол должен быть прямой

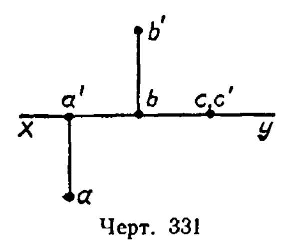
(308,1). Таким образом, четырехугольник $Aaa''a'$ будет прямоугольник, плоскость которого перпендикулярна к xy. Заметив, это, повернем горизонтальную полуплоскость H вокруг оси xy на 90° книзу; тогда она упадет на нижнюю вертикальную полуплоскость, образуя с верхней вертикальной полуплоскостью одну цельную вертикальную плоскость. При этом точки a'' и a' останутся на своих местах, а точка a займет положение ниже xy и расположится на продолжении перпендикуляра $a'a''$ на расстоянии $a''a$, равном Aa'. Мы получим тогда развернутый чертеж (329-й), который впредь будем называть *эпюром*; чертеж этот состоит из прямой xy, означающей ось проекций, и двух точек, расположенных на одном перпендикуляре к xy; нижняя точка есть горизонтальная проекция (иначе *план*), а верхняя — вертикальная проекция (иначе *фасад*) точки A.



Черт. 329



Черт. 330



Черт. 331

Конечно, всякой точке A, взятой внутри двугранного угла (черт. 328), соответствуют на эпюре две вполне определенные точки a и a', расположенные на одном перпендикуляре к xy. Обратно, всяким двум точкам эпюра a и a', расположенным на одном перпендикуляре к xy (точка a ниже xy, а точка a' выше xy), соответствует одна определенная точка A внутри двугранного угла. Чтобы получить эту точку, мы должны вообразить, что нижняя половина эпюра вращением вокруг оси xy снова повернута на 90° кверху, и затем из точек a и a' восставлены перпендикуляры к плоскостям образовавшегося двугранного угла; пересечение этих перпендикуляров и определит точку A.

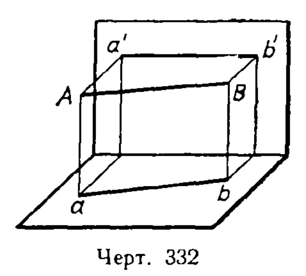
Таким образом, положение точки в пространстве определяется ее двумя проекциями; и в проекционном черчении, говоря, что «дана точка A», разумеют, что даны на эпюре проекции этой точки. Это письменно обозначают так: дана точка (a, a'), помещая в скобках сначала горизонтальную проекцию, а потом вертикальную.

325. Частные случаи. Из чертежей 330 и 331 видно, что:

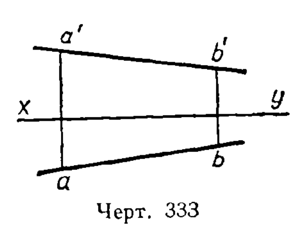
1. Если точка A лежит на горизонтальной плоскости, то ее вертикальная проекция a' лежит на оси xy, а горизонтальная совпадает с самой точкой.

2. Если точка B расположена на вертикальной плоскости, то ее горизонтальная проекция лежит на xy, а вертикальная совпадает с самой точкой.

3. Если точка C лежит на оси xy, то обе ее проекции совпадают с самой точкой.



Черт. 332



Черт. 333

326. Изображение прямой. Мы уже видели, что если проектируемая линия п р я м а я, то и проекция ее должна быть п р я м а я. Значит, отрезок прямой, соединяющей точки A и B (черт. 332), изобразится на эпюре (черт. 333) отрезками ab и $a'b'$, из которых первый есть горизонтальная проекция, а второй — вертикальная проекция отрезка AB. Таким образом, чтобы получить проекции неограниченной прямой на какую-нибудь плоскость, достаточно найти проекции на эту плоскость двух ее точек и через эти проекции провести прямую.

Проекции прямой можно получить еще иначе; а именно мы можем провести через эту прямую две плоскости: одну, перпендикулярную к горизонтальной плоскости проекций (она называется *горизонтально-проектирующая плоскость*), и другую, перпендикулярную к вертикальной плоскости проекций (она называется *вертикально-проектирующая плоскость*). Пересечение этих плоскостей с плоскостями проекций даст проекции ab и $a'b'$.

В проекционном черчении прямая всегда задается своими проекциями, и если говорится: «дана прямая», то это надо понимать в том смысле, что даны проекции прямой. Если отрезок прямой обозначен буквами AB, то его проекции обозначаются: ab (горизонтальная) и $a'b'$ (вертикальная); если неограниченная прямая обозначена одной буквой, например K, то проекции ее обозначаются тоже одной буквой (малой): k (горизонтальная) и k' (вертикальная).

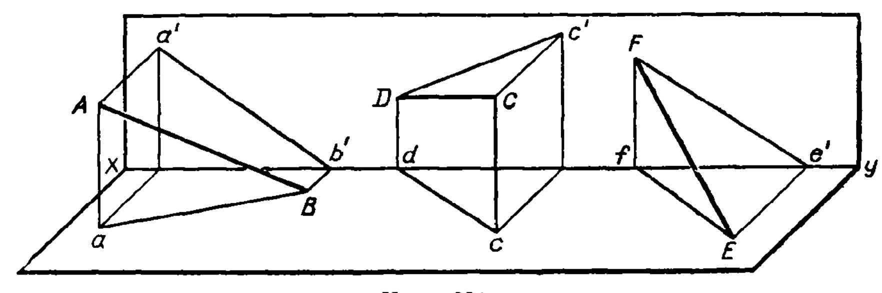
327. Частные случаи. 1. Один конец отрезка AB лежит на горизонтальной плоскости.

2. Один конец отрезка CD лежит на вертикальной плоскости.

3. Отрезок EF упирается своими концами в плоскости проекций.

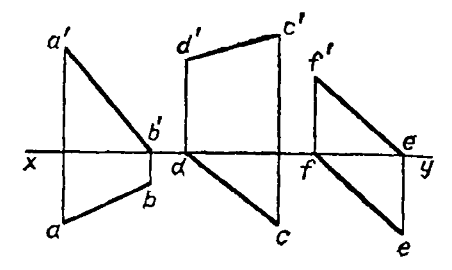
Эти три случая изображены в перспективном виде на черт. 334 и проекциями на эпюре 335.

4. Отрезок AB перпендикулярен к вертикальной плоскости проекций и упирается в нее (черт. 336).



Черт, 334

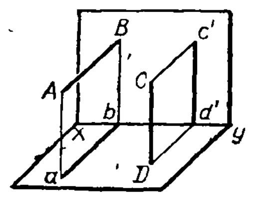
5. Отрезок CD перпендикулярен к горизонтальной плоскости и упирается в нее (тот же чертеж).

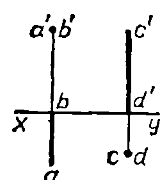


Черт. 335

6. Отрезок AB лежит в некоторой плоскости P, перпендикулярной к xy. Тогда обе проектирующие плоскости совпадают с плоскостью P и потому на эпюре ab, $a'b'$ расположены на одном перпендикуляре к xy (черт. 337).

7. Отрезок AB параллелен вертикальной плоскости. Тогда его горизонтальная проекция параллельна xy (черт. 338), а вертикальная проекция равна и параллельна AB.

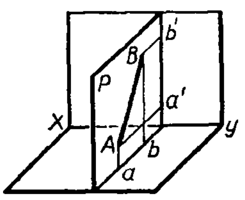


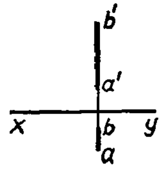


Черт. 336

8. Отрезок AB параллелен горизонтальной плоскости (черт. 339). Тогда его вертикальная проекция параллельна оси xy, а горизонтальная проекция равна и параллельна самому отрезку AB.

Предлагаем самим учащимся разобрать, как расположен отрезок прямой, если его проекции заданы так, как это указано на эпюрах 340 и 341.



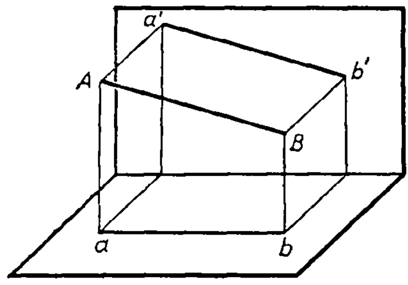


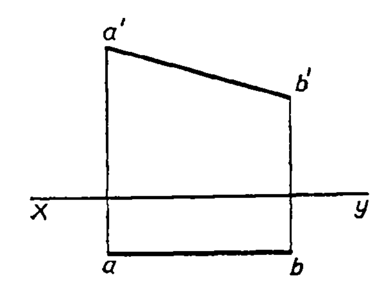
Черт. 337

328. З а д а ч а. Дана прямая (k, k'); найти следы этой прямой (черт. 342).

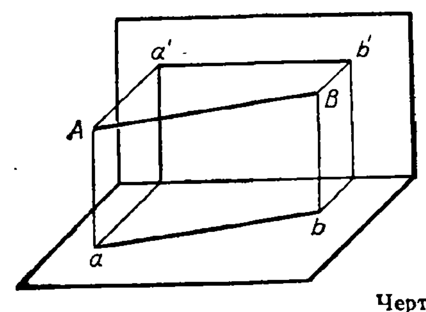
Следами прямой называются точки пересечения ее с плоскостями проекций, причем пересечение с плоскостью H называется *горизонтальным следом*, а пересечение с плоскостью V — *вертикальным следом*.

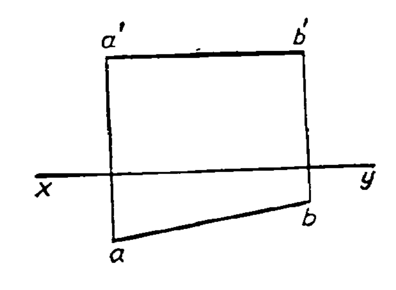
Очевидно, что горизонтальный след A лежит на плоскости H и на горизонтальной проекции прямой; равным образом, вертикальный



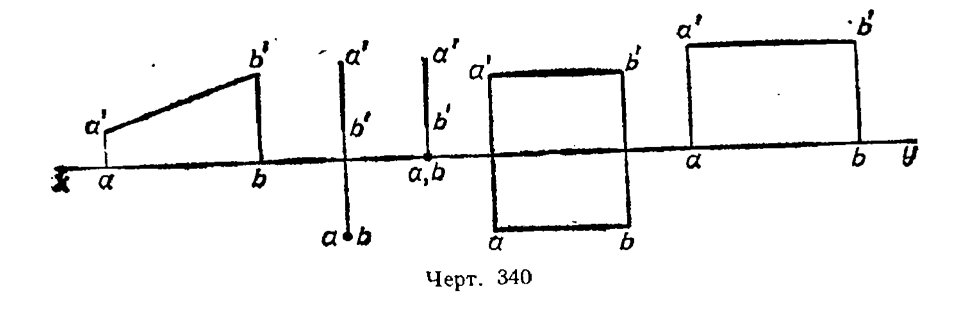


Черт. 338

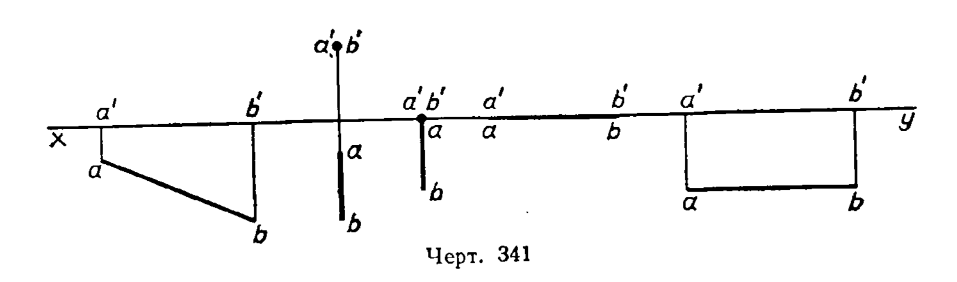




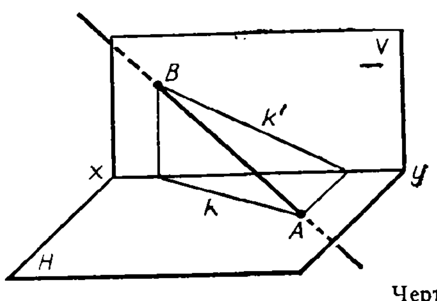
Черт. 339

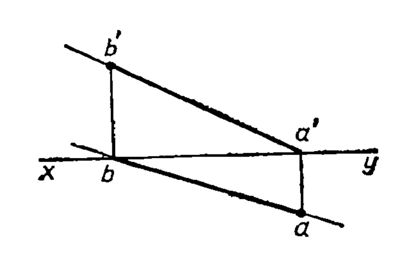


Черт. 340



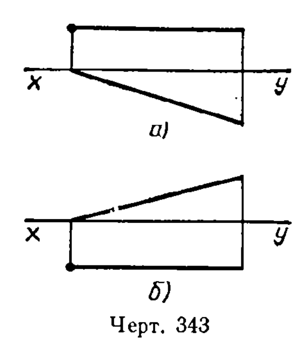
Черт. 341

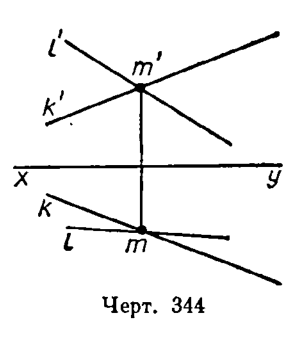




Черт. 342

след B лежит на плоскости V и на вертикальной проекции прямой. Поэтому на эпюре следы найдутся, если мы продолжим обе проекции до пересечения с осью xy и из полученных точек восставим перпендикуляры к оси до пересечения с проекциями прямой. Горизонтальный след будет точка (a, a'), вертикальный след — точка (b, b').





Черт. 343

Частные случаи: прямая параллельна горизонтальной плоскости проекций (черт. 343, *а*) или параллельна вертикальной плоскости проекций (черт. 343, *б*). В первом случае не будет горизонтального следа, во втором случае не будет вертикального. Если прямая параллельна обеим плоскостям проекций (и, следовательно, параллельна оси xy), то она не имеет ни одного следа.

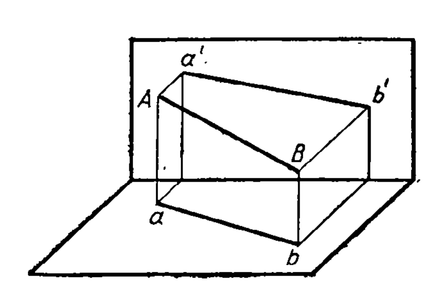
329. Проекции прямых пересекающихся и параллельных. Очевидно, что если две прямые (k, k' и l, l') пересекаются, то пересекаются также и их одноименные проекции, причем точки пересечения m и m' лежат на одном перпендикуляре к оси xy. Обратно: если одноименные проекции двух прямых пересекаются, причем точки пересечения лежат на одном перпендикуляре к оси xy, то и сами прямые пересекаются, так как точка (m, m'), определяемая точками пересечения проекций (черт. 344), принадлежит обеим прямым.

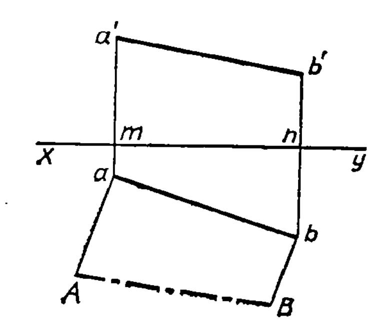
Черт. 344

Как уже было объяснено раньше (323, 6), проекции параллельных прямых на любую плоскость должны быть параллельны.

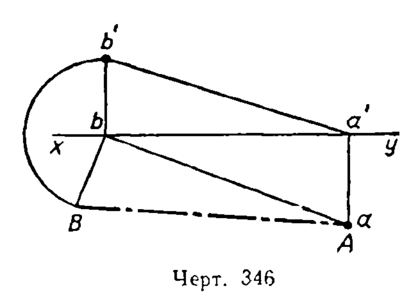
330. Задача. По данным проекциям отрезка прямой (ab, $a'b'$) найти его истинную длину (черт. 345).

Обратив внимание на горизонтально-проектирующую плоскость, мы заметим, что в этой плоскости образуется трапеция $ABba$, у которой параллельные стороны суть перпендикуляры Aa и Bb, а непараллель-





Черт. 345



Черт. 346

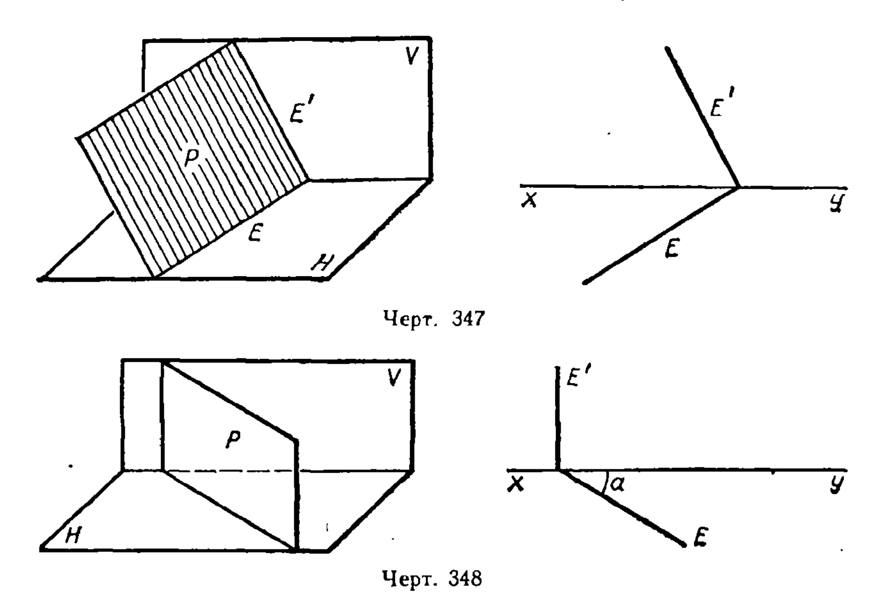
ные — горизонтальная проекция ab и сам отрезок AB, длину которого требуется найти. Чтобы построить такую трапецию на эпюре, восставим из точек a и b перпендикуляры к ab и на них отложим длины $aA = a'm$ и $Bb = b'n$. Тогда расстояние AB и будет истинная длина отрезка.

Подобное же построение можно выполнить, построив трапецию $ABb'a'$, образующуюся в вертикально-проектирующей плоскости.

Частный случай: отрезок ограничен следами прямой (черт. 346). Тогда указанная трапеция обращается в прямоугольный треугольник abB, у которого один катет есть ab, а другой равен bb'. Гипотенуза этого треугольника и будет истинная длина отрезка, а угол baB будет угол, образованный отрезком с плоскостью H.

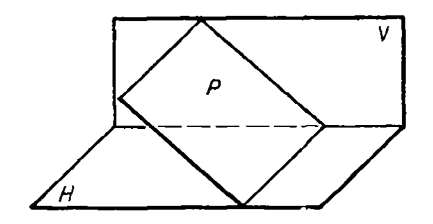
331. Изображение плоскости посредством ее следов. Прямые (E и E', черт. 347), по которым какая-нибудь плоскость (P) пересекается с плоскостями проекций, называются следами этой плоскости, причем пересечение E с горизонтальной плоскостью H называется *горизонтальным следом*, а пересечение E' с вертикальной плоскостью V называется *вертикальным следом*. В проекционном черчении плоскость обыкновенно задается ее двумя следами, и если говорят: «дана плоскость», то это значит, что даны следы плоскости.

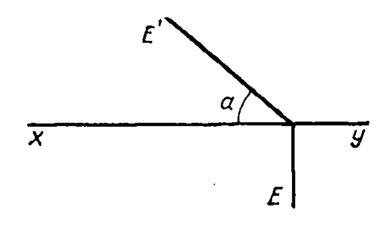
На нашем чертеже оба следа пересекаются между собой; тогда точка их пересечения, конечно, лежит на оси xy.



Черт. 347

Черт. 348





Черт. 349

332. Частные случаи. 1. Если плоскость P перпендикулярна к H, но наклонна к V (черт. 348), то ее вертикальный след E' перпендикулярен к xy, а горизонтальный составляет с xy некоторый угол a, равный линейному углу двугранного, образованного P с V.

2. Если плоскость P перпендикулярна к V, но наклонна к H (черт. 349), то $E \perp xy$ и E' образует с xy какой-нибудь угол a, равный линейному углу двугранного, составляемого P с H.

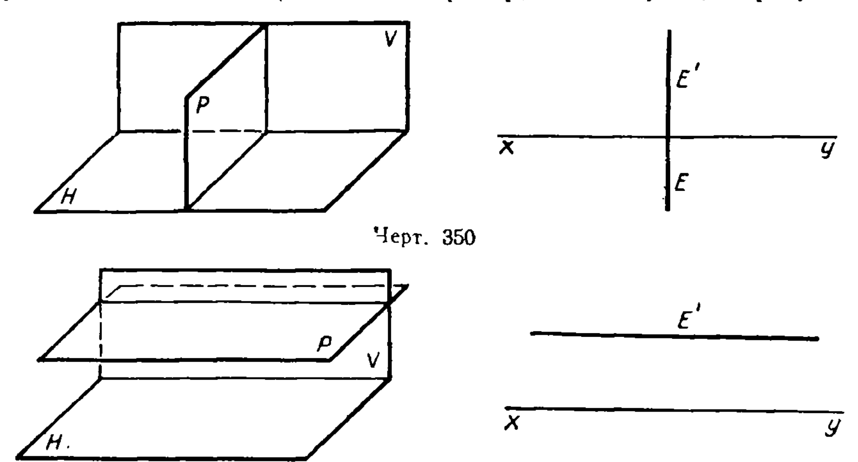
3. Если плоскость $P \perp H$ и $P \perp V$, то $P \perp xy$ (**312**), и тогда оба следа перпендикулярны к xy (черт. 350).

4. Если плоскость $P \parallel H$, то у нее нет горизонтального следа, а вертикальный след E' параллелен оси xy (черт. 351).

5. Если плоскость $P \parallel V$, то у нее нет вертикального следа, а горизонтальный след E параллелен оси xy (черт. 352).

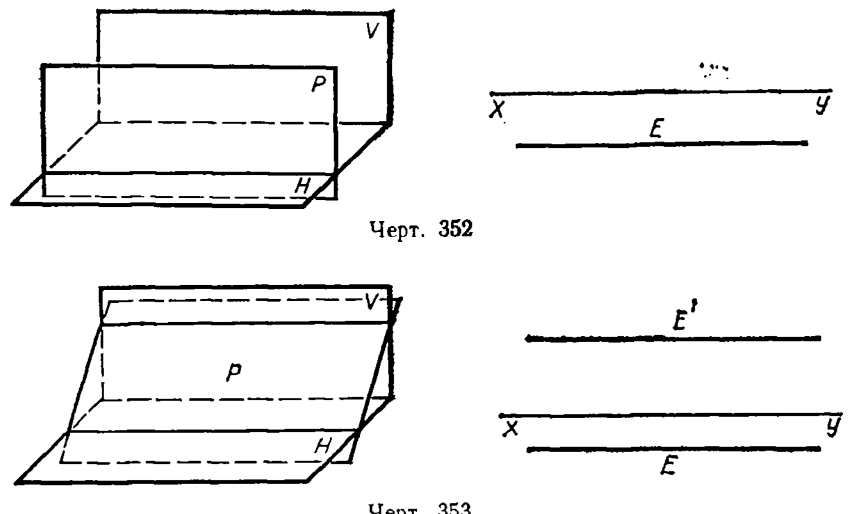
6. Если плоскость P наклонна к H и к V, но параллельна оси xy (черт. 353), то оба ее следа параллельны xy, так как каждая из плоскостей H и V, проходя через прямую xy, параллельную плоскости P, пересекается с этой плоскостью по прямой, параллельной xy (**294**).

7. Наконец, если плоскость P проходит через xy, то оба ее следа сливаются с осью проекций. В этом случае одних следов недостаточно для определения положения плоскости; надо еще задать какое-нибудь дополнительное условие; например, задать угол, образуемый



Черт. 350

Черт. 351

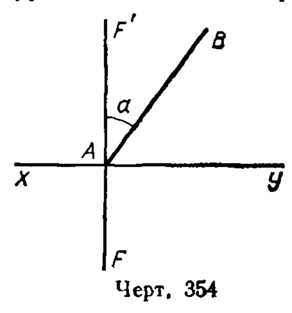


Черт. 352

Черт. 353

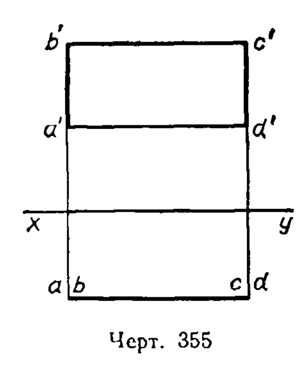
плоскостью P с H или с V. Всего удобнее это сделать (черт. 354), построив так называемый профильный (боковой) вид. Для построения его вообразим какую-нибудь поперечную плоскость (F, F'), перпендикулярную к xy. Плоскость эта, конечно, пересечется с плоскостью P по некоторой прямой. Чтобы указать положение этой прямой, совместим поперечную плоскость с плоскостью V, вращая первую вокруг следа F' (положим, направо). Тогда линия пересечения упадет на плоскость V и изобразится, положим, в виде прямой AB, которая со следом F' образует угол a, равный углу, составленному плоскостью P с плоскостью V. Это будет профильный вид. Можно было бы вращать поперечную плоскость вокруг следа F до совмещения ее с плоскостью H и указать в этом совмещенном положении линию пересечения данной плоскости с плоскостью (F, F').

Заметим, что к содействию поперечной плоскости, совмещенной с одной из плоскостей проекций, приходится прибегать и в некоторых других случаях, чтобы яснее изобразить проекцию какой-нибудь фигуры так, как она представляется сбоку (в профиль).

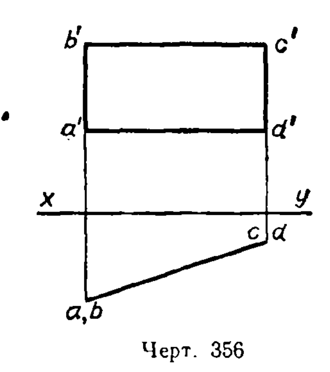


Черт. 354

333. Проекции многоугольников. Чтобы получить проекции какого-нибудь многоугольника, достаточно найти проекции всех его вершин, а затем и сторон. Например, на черт. 355 изображены проекции прямоугольника, помещенного в плоскости, параллельной вертикальной плоскости проекций, и у которого две стороны горизонтальны, а другие две вертикальны. В этом случае его фасад воспроизводит натуральный вид прямоугольника. На черт. 356 изображен прямоуголь-



Черт. 355



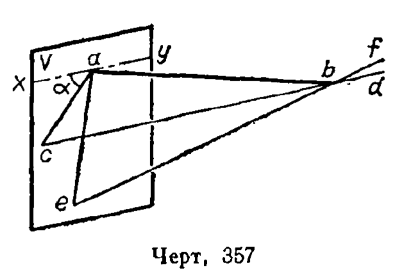
Черт. 356

ник, расположенный в плоскости, перпендикулярной к горизонтальной плоскости проекций, но наклонной к вертикальной, и у которого две стороны горизонтальны, а две другие вертикальны. Его вертикальная проекция есть прямоугольник, у которого вертикальные стороны сохраняют свою натуральную величину, а две другие имеют меньшую длину, чем соответствующие стороны прямоугольника (их истинную длину можно найти так, как это указано в задаче § 330).

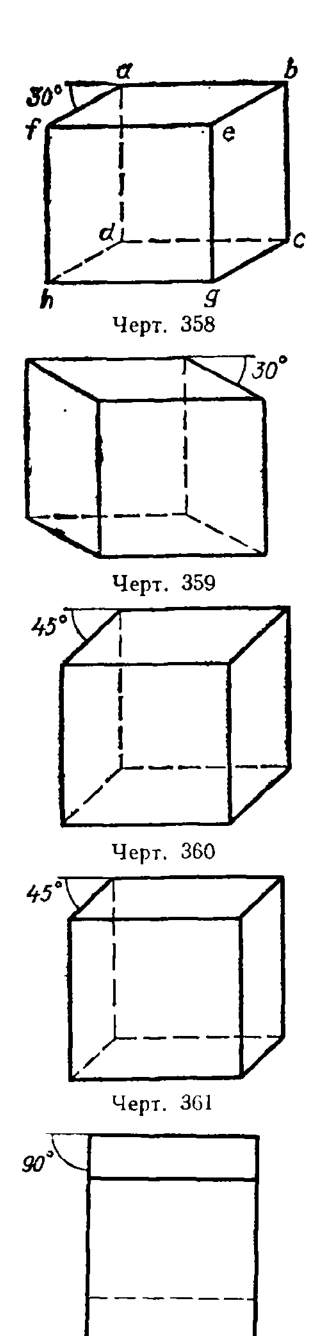
З а м е ч а н и е. Ниже будут указаны проекции некоторых многогранников и круглых тел.

IV. НАЧАЛА КОСОУГОЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

334. Как мы знаем (323,2), проекция (ортогональная и косоугольная) отрезка прямой, параллельной плоскости проекций, параллельна самому отрезку и равна ему по длине. Что касается отрезков прямых, непараллельных плоскости проекций (в частности, перпендикулярных к ней), то направление и величина их проекций зависит от направления проектирующих прямых. Пусть, например, проектируется отрезок ab (черт. 357), перпендикулярный к плоскости проекций V и упирающийся в нее концом a. Если проектирующие линии направлены параллельно прямой cd, то проекцией будет прямая ac, пересечение плоскости V с плоскостью, проходящей через ab и bc. Если проектирующие линии будут параллельны прямой ef, то проекцией будет ae. Так как направлений проектирующих линий может быть бесчисленное множество, то и косоугольных проекций одного и того же отрезка ab может быть сколько угодно, причем длина проекции, очевидно, может быть и меньше, и больше, и равна длине самого отрезка. Обыкновенно из всех возможных направлений проектирующих линий берут такое, при котором для каждого отрезка ab, перпендикулярного плоскости V, проекция его ac составляет с горизонтальной прямой xy (проведенной на пл. V



Черт. 357



Черт. 358

Черт. 359

Черт. 360

Черт. 361

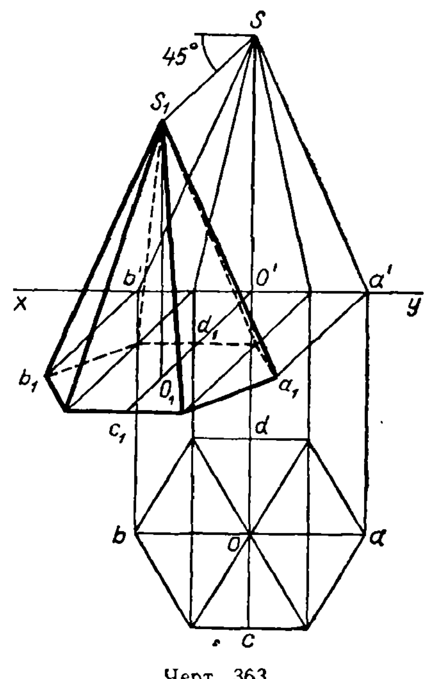
Черт. 362

через точку a) угол (обозначенный на чертеже буквою α) в 30° или 45°, а длина проекции ac вдвое меньше длины самого отрезка ab. Конечно, для направления проекции можно было бы брать угол α не в 30° или 45°, а какой-нибудь другой величины, и длину проекции укорачивать сравнительно с длиной самого отрезка не в 2 раза, а в каком-нибудь ином отношении; но опыт показывает, что при других условиях получались бы такие чертежи, по которым труднее составить себе ясное представление об изображенном предмете. Мы сейчас увидим это на одном примере. Заметим предварительно, что при косоугольном проектировании довольствуются проекцией на одну вертикальную плоскость.

335. Пусть требуется изобразить косоугольную проекцию куба, поставленного на горизонтальную плоскость и придвинутого задней своей гранью вплотную к вертикальной плоскости проекций. Тогда проекция его задней грани на вертикальную плоскость (не указанную на черт. 358) сольется с самой гранью $abcd$. Чтобы начертить проекцию af верхнего левого ребра, перпендикулярного к плоскости проекций, мы проводим из точки a прямую под углом в 30° к горизонтальной прямой ab и на ней откладываем длину af, равную половине истинной длины ребра куба. Все остальное начертить теперь легко (так как параллельные отрезки остаются параллельными и в проекции). Мы получим тогда косоугольную проекцию куба при условии, что $\angle\alpha$ (черт. 358) равен 30° и что длина проекций отрезков, перпендикулярных к плоскости проекций, сокращена против натуральной длины в 2 раза (или, как говорят, «масштаб сокращения» равен $^1/_2$). Из чертежа видно, что на нем куб изображен в таком виде, в каком он представляется далеко удаленному глазу, помещенному так, что ему видны, кроме передней грани, еще верхняя и правая боковая. Черт. 359 изображает тот же куб при тех же условиях, но лучи зрения направлены так, что глазу не видна правая боковая грань, а видна левая. Черт. 360, 361 и 362 изображают тот же куб при других условиях: α=45°, сокращение 1 : 2 (черт. 360),

$\alpha=45°$, сокращение 1 : 3 (черт. 361), $\alpha = 90°$, сокращение 1 : 3 (черт. 362). Очевидно, что на черт. 360 и 361 куб изображен более наглядно, чем на черт. 362.

Заметим, что в том случае, когда длина проекции отрезка, перпендикулярного к плоскости проекций, составляет половину длины самого этого отрезка, угол, образуемый направлением проектирующих прямых с плоскостью проекций, должен быть 63° с небольшим. Действительно, из черт. 357 видно, что когда в $\triangle ABC$ катет ab вдвое больше катета ac, то это значит, что тангенс угла acb равен 2, а такой угол (как видно из таблиц, приложенных в конце этой книги) должен быть немного более 63° (более точная величина его 63°25′); угол же acb и есть тот, который проектирующие линии образуют с плоскостью проекций (**315**).



Черт. 363

336. Умея строить косоугольные проекции отрезков, перпендикулярных к плоскости проекций, мы легко можем построить косоугольную проекцию всякого другого отрезка и, следовательно, всякого многогранника. Как надо поступать при этом, будет видно из следующего примера.

Пусть требуется начертить (при сокращении 1 : 2 и при угле $\alpha=45°$) косоугольную проекцию правильной шестиугольной пирамиды, заданной на черт. 363 своими ортогональными проекциями. Сначала найдем проекцию основания пирамиды, поставленной, как видно из чертежа, на горизонтальную плоскость проекций. Возьмем вершину a многоугольника. Перпендикуляр aa', проектирующий (ортогонально) эту вершину на вертикальную плоскость, пересекает ее в точке a'; поэтому для получения косоугольной проекции этого перпендикуляра мы проводим из точки a' прямую под углом в 45° к оси проекций xy и на ней откладываем от a' отрезок, равный $^1/_2\, aa'$. Мы получим тогда косоугольную проекцию a_1 вершины a. Таким же точно путем получим косоугольные проекции и всех прочих вершин многоугольника и центра его O (проверкой чертежа может служить то, что проекция центра O должна оказаться на пересечении проекций диагоналей). Теперь найдем косоугольную проекцию вершины пирамиды. Для этого употребим прием, которым вообще можно находить косоугольную проекцию всякой точки, лежащей выше горизонтальной плоскости проекций. Перпендикуляр, проведенный из вершины пирамиды на вертикальную

плоскость, пересекает ее в точке S. Поэтому мы проводим из S прямую под углом в 45° к горизонтальной прямой и на ней откладываем отрезок SS_1, равный $^1/_2 OO'$. Точка S_1 и будет косоугольная проекция вершины пирамиды. Остается соединить ее со всеми вершинами основания.

Впрочем, в рассматриваемом частном случае, когда основание пирамиды есть правильный шестиугольник, расположенный на горизонтальной плоскости так, что две его стороны параллельны оси xy, можно было бы косоугольную проекцию получить проще, а именно найти сначала указанным выше путем проекцию O_1 (центра основания), затем через O_1 провести прямую, параллельную и равную диаметру ab, потом найти проекции c_1 и d_1 точек c и d, через них провести прямые, параллельные a_1b_1 и равные сторонам многоугольника; из O_1 восставить перпендикуляр к xy и отложить на нем отрезок O_1S_1, равный $O'S$, и т. д.

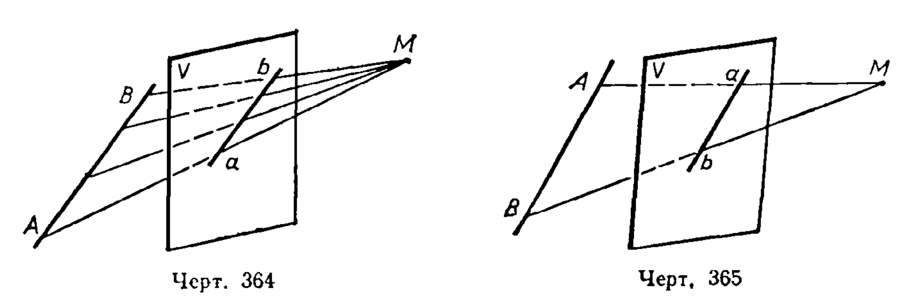
Замечания. 1. Если бы надо было построить косоугольную проекцию круга, то на окружности его можно было бы наметить несколько точек, построить их проекции и обвести их непрерывной кривой.

2. Нет надобности косоугольную проекцию помещать так близко к ортогональной, как это сделано на черт. 363. Можно было бы, имея ортогональную проекцию, отнести ось xy куда-нибудь в другое место и, отметив на новом положении оси те точки a', b', . . ., которые имеются на чертеже ортогональной проекции, поступать затем, как указано, т. е. провести прямые под углом в 45° к горизонтальным прямым и пр.

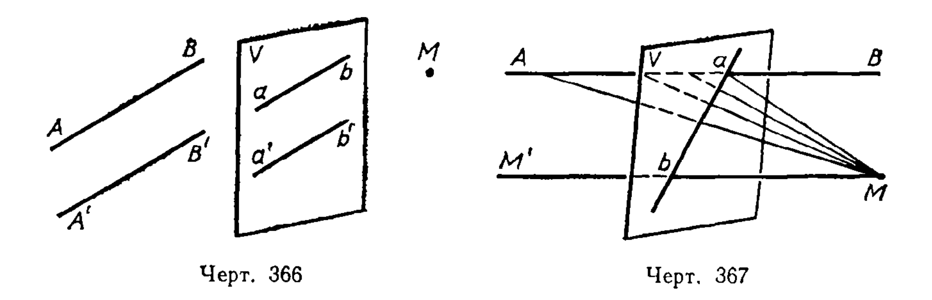
V. НАЧАЛА ПЕРСПЕКТИВНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

337. Перспектива точки и прямой. Перспектива данной точки A (черт. 364), расположенной за картинной плоскостью (за экраном V), есть точка a, в которой пересекается с картинной плоскостью луч зрения MA, соединяющий глаз, расположенный в центре перспективы M, с точкой A. В частном случае, если данная точка лежит на картинной плоскости, перспектива ее сливается с самой этой точкой.

Перспектива данной фигуры есть геометрическое место перспектив всех точек этой фигуры. Если данная фигура есть прямая AB (черт. 364), то все лучи зрения, проведенные к разным ее точкам, лежат в одной плоскости, проходящей через глаз и прямую; поэтому п е р-



Черт. 364 Черт. 365



Черт. 366 Черт. 367

спектива прямой есть прямая. Впрочем, если прямая проходит через глаз, то перспектива ее превращается в точку (все лучи зрения сливаются).

338. Главнейшие свойства перспективы прямых.

1. **Перспектива прямой** (AB, черт. 365), **параллельной экрану** (V), **параллельна самой прямой,** так как проектирующая плоскость, проходящая через глаз M и прямую AB, параллельную V, должна пересечься с V по прямой, параллельной AB.

2. **Перспективы** (ab и $a'b'$, черт. 366) **прямых** (AB и $A'B'$), **параллельных между собой и параллельных экрану** (V), **параллельны,** так как согласно предыдущему свойству $ab \parallel AB$, $a'b' \parallel A'B'$ и, следовательно, $ab \parallel a'b'$.

3. **Перспективы прямой** (AB, черт. 367), **пересекающейся с экраном, проходят через след** (a) **этой прямой** (т. е. через точку, в которой прямая пересекается с экраном), так как точка эта, будучи сама себе перспективой, принадлежит перспективе прямой.

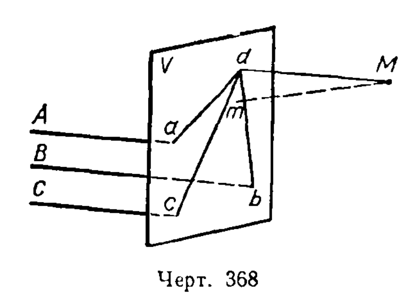
4. Вообразим прямую MM' (черт. 367), проведенную из глаза M параллельно данной прямой AB, пересекающей экран V в точке a. Прямая MM' должна тоже пересечься с плоскостью V в некоторой точке b. Через эту точку должна проходить перспектива прямой AB, так как плоскость, проходящая через глаз M и прямую AB, должна проходить и через MM' и потому линия пересечения этой плоскости с плоскостью V должна содержать в себе точку b. Заметим, что точка (b), в которой пересекается с экраном вспомогательная прямая (MM'), проведенная из глаза параллельно данной прямой (AB), называется *точкой схода* этой данной прямой [1].

Мы видим теперь, что если прямая (AB) пересекается с экраном, то перспектива ее проходит через две точки: 1) через след этой прямой (a) и 2) через точку ее схода (b).

Мы вскоре увидим, как можно пользоваться этим свойством при построении перспективы данной фигуры.

---

[1] Если на прямой AB мы будем брать точки, все более и более удаленные от a за точку A, то луч зрения будет неограниченно приближаться к прямой MM' и перспектива удаляющейся точки будет неограниченно приближаться к точке b. Таким образом, можно сказать, что точка схода данной прямой есть перспектива бесконечно удаленной ее точки.



Черт. 368

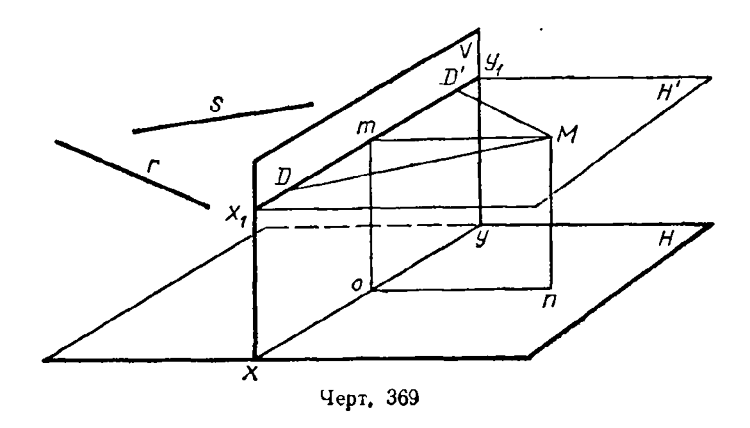
5. **Перспективы прямых** (A, B, C, . . ., черт. 368), **параллельных между собой, но непараллельных экрану** (V), **пересекаются в общей точке схода этих прямых** (в точке d). Проведя из глаза прямую Md, параллельную прямым A, B, C, . . ., мы получим общую точку схода d для всех этих прямых. Перспективы их, проходя через следы a, b и c и общую точку схода d, будут сходиться в этой точке (вот почему она и называется точкой *схода*).

В частности, все прямые, перпендикулярные к плоскости V, сходятся в точку, представляющую собой ортогональную проекцию точки зрения (глаза) на плоскость экрана.

6. **Перспективы пересекающихся прямых также пересекаются,** так как они содержат общую точку, именно перспективу точки пересечения данных прямых.

339. Некоторые названия, употребительные в перспективном черчении. Пусть V (черт. 369) будет в е р т и к а л ь н а я к а р т и н н а я плоскость, или э к р а н, а H горизонтальная, или з е м н а я, плоскость.

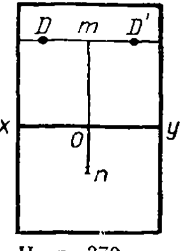
Пересечение этих двух плоскостей, т. е. прямая xy, называется *основанием* картины. Пусть глаз наблюдателя помещается в точке M, называемой в таком случае *точкой зрения* или *центром перспективы.* Опустив на плоскости V и H перпендикуляры из точки M, мы получим две точки: точку m, проекцию глаза на экран, и точку n, означающую место, на котором стоит наблюдатель на земле. Горизонтальная плоскость H', проведенная через глаз параллельно земной плоскости, называется *плоскостью горизонта*, а пересечение x_1y_1 этой плоскости с экраном называется *линией горизонта*. Эта линия есть геометрическое место точек схода для всех г о р и з о н т а л ь н ы х п р я м ы х, так как лучи зрения, параллельные горизонтальным прямым, лежат



Черт. 369

на плоскости горизонта и, следовательно, пересекаются с экраном на линии горизонта.

Фигура, перспективу которой мы желаем изобразить, предполагается находящейся за экраном, на земной плоскости или выше ее.



Черт. 370

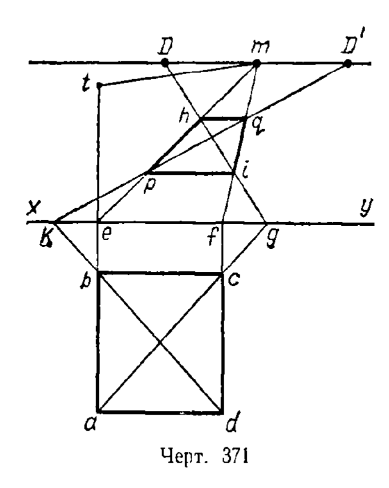
Вообразим, что плоскость H вращением ее вокруг основания картины повернута на 90° вниз. Пусть черт. 370 (называемый *эпюром*) изображает положение получившегося развернутого двугранного угла, как оно представляется нам, если смотреть на него спереди (буквы, поставленные нами на эпюре, означают те же точки, что и на черт. 369). На таком эпюре мы и будем чертить перспективу данной фигуры, лежащей за картинной плоскостью.

340. Точки расстояний. В перспективном черчении играют большую роль так называемые точки расстояний D и D' (черт. 369 и 370), расположенные на линии горизонта по обе стороны от проекции глаза m на одинаковых от нее расстояниях, равных расстоянию on ($=Mm$) глаза от экрана [1]. Для уяснения роли этих точек вообразим, что мы имеем за экраном какую-нибудь горизонтальную прямую, наклонную к экрану под углом в 45° (пусть это будет прямая r или s, черт. 369). Найдем точку схода такой прямой. Для этого надо провести из глаза прямую, параллельную r (или s), и найти ее пересечение с экраном. Такая прямая должна лежать в плоскости горизонта, так как r (или s) — горизонтальная прямая. Так как, кроме того, эти прямые образуют с экраном угол в 45°, то и прямая, проведенная из глаза параллельно им, образует с линией горизонта тоже угол в 45°, и потому она пересечет плоскость экрана либо в точке D, либо в точке D', так как катеты прямоугольных треугольников MmD и MmD' равны (по построению) и, следовательно, каждый острый угол этих треугольников составляет 45°. Таким образом, точки расстояния — это точки схода горизонтальных прямых, наклонных к экрану под углом в 45°. Какую из двух точек — D или D' — надо принять за точку схода данной горизонтальной прямой, это зависит от направления этой прямой: если она направлена так, как прямая s (черт. 369), то точкой схода будет D, а если так, как прямая r, то точкой схода будет D'.

При построении перспективы какой-нибудь фигуры очень часто приходится иметь дело с горизонтальными прямыми, наклонными к экрану под углом 45°, и поэтому часто приходится прибегать к содействию точек расстояния.

341. Примеры построения перспективы. Пусть требуется начертить перспективу квадрата при следующих заданиях: 1) основание картины есть прямая xy (черт. 371), 2) проекция глаза — m, 3) точки расстояния — D и D' (значит, $mD=mD'=$ расстоянию глаза от экрана), и, наконец, 4) квадрат расположен на земной плоскости, за экраном, так,

[1] В некоторых книгах по перспективному черчению они называются также точками отдаления, так как по ним можно судить об отдалении глаза от экрана.



Черт. 371

что две его стороны параллельны основанию картины. Чтобы не затемнить чертежа обилием линий, мы начертим данный квадрат не за картинной плоскостью, а перед ней, расположив его симметрично с данным квадратом относительно основания картины. Пусть это будет *abcd*. Значит, из двух его сторон, параллельных прямой *xy*, сторона *bc* будет соответствовать той стороне за экраном, которая ближе к *xy*. Найдем сначала перспективы сторон *ab* и *cd*. Для этого отыщем следы и точки схода этих сторон. Следы будут, очевидно, *e* и *f*. Так как взятые стороны перпендикулярны к экрану, то точка схода каждой из них будет проекция глаза, т. е. точка *m*. Теперь вспомним, что перспектива всякой прямой, пересекающей экран, должна проходить через след и через точку схода этой прямой (свойство 4 § 338). Поэтому, проведя прямые *em* и *fm*, мы получим направления перспектив сторон *ab* и *cd*.

Остается, однако, неизвестным, где на этих направлениях лежат концы сторон. Всего проще можно определить это, если найдем перспективу направления какой-нибудь диагонали квадрата, например, соответствующей *ac*, а потом возьмем пересечение этого направления с найденными направлениями сторон. Для нахождения перспективы направления диагонали надо определить след и точку схода ее. След диагонали будет точка, в которой продолжение *ac* пересекается с основанием *xy*, а точка схода будет точка расстояния *D*, так как в эту точку упирается прямая, проведенная из глаза параллельно взятой диагонали (не будем забывать, что взятая диагональ в действительности есть не *ac*, а прямая, симметрично расположенная с *ac* за экраном). Значит, перспектива направления диагонали будет *gD* и потому перспективы вершин *a* и *c* будут *h* и *i*. Теперь, приняв во внимание, что стороны *bc* и *ad* параллельны картинной плоскости, а перспективы таких прямых параллельны самим прямым, мы проводим линии *ip* и *hq* параллельно основанию картины. Перспектива квадрата будет *iphq* [1]. Для проверки чертежа можно провести еще прямую *KD'*; при правильном выполнении чертежа эта прямая должна пройти через точки *p* и *q*.

Обратим внимание на то, что из двух сторон квадрата, параллельных экрану, более близкая к нему имеет в перспективе большую дли-

[1] Теперь легко было бы дополнить наш чертеж, чтобы получить перспективу куба, поставленного на взятый квадрат. Для этого надо было бы на продолжении *ab* отложить *et*=*ab*, точку *t* соединить прямой с *m*, из *p* и *h* восставить перпендикуляры к основанию картины до пересечения с *tm* и т. д.

ну, чем дальняя сторона. Так оно и должно быть, так как по мере удаления отрезка от экрана угол зрения, под которым он виден, все уменьшается.

342. Сравнение проекций трех родов. Сравнивая между собой проекции: ортогональные, косоугольные и перспективные, мы видим, что каждая из них обладает своими достоинствами и своими недостатками.

Ортогональное проектирование, давая план, фасад, а иногда и профиль изображаемого предмета, позволяет безошибочно судить о расположении в пространстве всех частей его и об их относительном размере; но составить себе по ортогональным проекциям ясное понятие о том, как этот предмет представлялся бы глазу, часто весьма затруднительно (иногда чертеж бывает очень сложный).

Перспективное проектирование, наоборот, дает вполне наглядное зрительное представление о предмете, но не указывает точных размеров его частей.

Косоугольное проектирование, уподобляясь перспективному, дает более наглядное, чем при ортогональном проектировании, представление о виде предмета и до некоторой степени позволяет судить также и о размерах его частей (если известен масштаб «сокращения»).

Ортогональные проекции имеют весьма большое значение в тех случаях, когда по данному чертежу требуется изготовить самый предмет (например, при постройке домов, мостов, машин и т. п.). Перспективное черчение употребительно в тех случаях, когда желательно, чтобы зритель, смотрящий на картину, сразу составил себе ясное представление об изображенном предмете; им пользуются в рисовании и живописи. Косоугольное проектирование полезно тогда, когда при помощи не очень сложных чертежей желают дать довольно наглядное представление о предмете и в то же время указать чертежом (хотя и приблизительно) на относительные размеры его частей. Такими чертежами иллюстрируются, например, книги по геометрии.

УПРАЖНЕНИЯ

419. Через данную точку провести прямую, параллельную данной прямой (§ 329).

420. а) Даны две точки; найти расстояние между ними (§ 330).

б) Даны проекции трех вершин треугольника, найти длины его сторон.

421. Найти угол между двумя пересекающимися прямыми.

(Указание. На каждой прямой можно взять по какой-нибудь точке; эти точки вместе с точкой пересечения прямых можно принять за вершины треугольника; найдя длины его сторон, построим самый треугольник. Один из углов его будет искомый.)

422. Дана прямая; найти углы, образуемые ею с плоскостями проекций (§ 315, 330).

423. Провести плоскость через две пересекающиеся или параллельные прямые (§ 328, 329).

424. Провести плоскость через данную прямую и данную точку, лежащую вне этой прямой.

425. Провести плоскость через три данные точки, не лежащие на одной прямой.

ОТДЕЛ ТРЕТИЙ

МНОГОГРАННИКИ

I. СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА И ПИРАМИДЫ

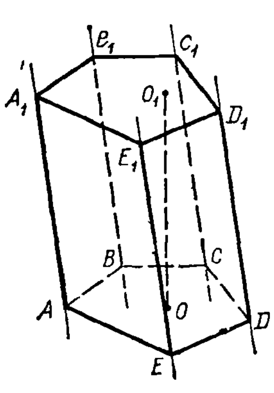
343. Многогранник. *Многогранником* называется тело, ограниченное со всех сторон плоскостями. Многоугольники, образованные пересечением этих плоскостей, называются *гранями*, их стороны — *ребрами*, а вершины — *вершинами* многогранника. Прямые, соединяющие две какие-нибудь вершины, не лежащие на одной грани, называются *диагоналями* многогранника.

Мы будем рассматривать только выпуклые многогранники, т. е. такие, которые расположены по одну сторону от каждой своей грани.

Наименьшее число граней в многограннике четыре; такой многогранник получается от пересечения трехгранного угла какой-нибудь плоскостью.

344. Призма. *Призмой* называется многогранник, у которого две грани — равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а все остальные грани — параллелограммы.

Чтобы показать возможность существования такого многогранника, возьмем (черт. 372) какой-нибудь многоугольник $ABCDE$ и через его вершины проведем ряд параллельных прямых, не лежащих в его плоскости. Взяв затем на одной из этих прямых произвольную точку A_1, проведем через нее плоскость, параллельную плоскости $ABCDE$; через каждые две последовательные параллельные прямые также проведем плоскости. Пересечение всех этих плоскостей определит многогранник $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$, удовлетворяющий определению призмы. Действительно, параллельные плоскости $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ пересекаются боковыми плоскостями по параллельным прямым (299); поэтому фигуры AA_1E_1E, EE_1D_1D и т. д.— параллелограммы. С другой стороны, у многоугольников $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ равны соответственно стороны (как противоположные стороны параллелограммов) и углы (как углы с параллельными и одинаково направленными сторонами); следовательно, эти многоугольники равны.

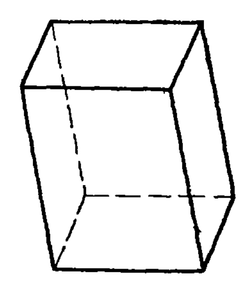


Черт. 372

Многоугольники $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$, лежащие в параллельных плоскостях, называются *основаниями* призмы; перпендикуляр OO_1, опущенный из какой-нибудь точки одного основания на другое, называется *высотой* призмы. Параллелограммы называются *боковыми гранями* призмы, а их стороны, соединяющие соответственные вершины оснований,— *боковыми ребрами*. У призмы все боковые ребра равны, как отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями.

Плоскость, проведенная через какие-нибудь два боковых ребра, не прилежащих к одной боковой грани призмы, называется *диагональной плоскостью*.

Призма называется *прямой* или *наклонной*, смотря по тому, будут ли ее боковые ребра перпендикулярны или наклонны к основаниям. У прямой призмы боковые грани суть прямоугольники. За высоту такой призмы можно принять боковое ребро.

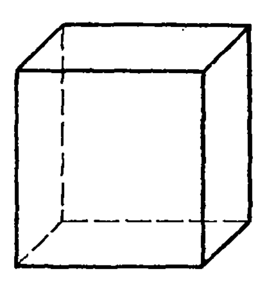


Черт. 373

Прямая призма называется *правильной*, если ее основания — правильные многоугольники. У такой призмы все боковые грани суть равные прямоугольники.

Призмы бывают треугольные, четырехугольные и т. д., смотря по тому, лежит ли в основании треугольник, четырехугольник и т. д.

345. Параллелепипед. Так называют призму, у которой основаниями служат параллелограммы (черт. 373).



Черт. 374

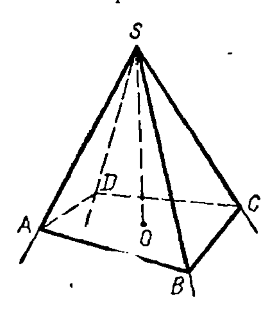
Параллелепипеды могут быть прямые и наклонные. Прямой параллелепипед называется *прямоугольным*, если его основания — прямоугольники (черт. 374).

Из этих определений следует:

1) у параллелепипеда все шесть граней — параллелограммы;

2) у прямого параллелепипеда четыре боковые грани — прямоугольники, а два основания — параллелограммы;

3) у прямоугольного параллелепипеда все шесть граней — прямоугольники.



Черт. 375

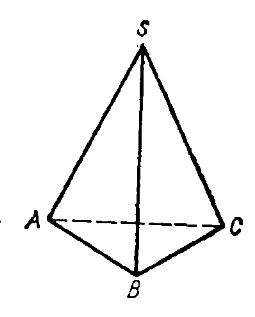
Три ребра прямоугольного параллелепипеда, сходящиеся в одной вершине, называются его *измерениями*; одно из них можно рассматривать как длину, другое как ширину, а третье как высоту.

Прямоугольный параллелепипед, имеющий равные измерения, называется *кубом*. У куба все грани — квадраты.

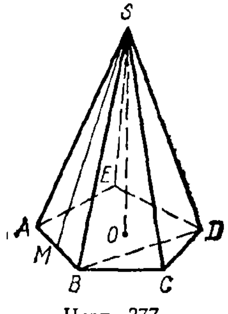
346. Пирамида. *Пирамидой* называется многогранник, у которого одна грань, называемая основанием, есть какой-нибудь многоугольник, а все остальные грани, называемые боковыми,— треугольники, имеющие общую вершину.

Чтобы получить пирамиду, достаточно какой-нибудь многогранный угол S (черт. 375) пересечь произвольно плоскостью $ABCD$ и взять отсеченную часть $SABCD$.

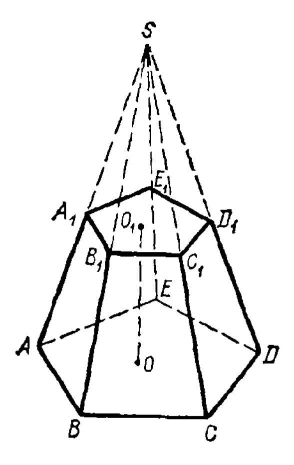
Общая вершина S боковых треугольников называется *вершиной* пирамиды, а перпендикуляр SO, опущенный из вершины на основание,— *высотой* ее.



Черт. 376



Черт. 377



Черт. 378

Обыкновенно, обозначая пирамиду буквами, пишут сначала ту, которая поставлена у вершины, например *SABCD* (черт. 375).

Плоскость, проведенная через вершину пирамиды и через какую-нибудь диагональ основания (например, через диагональ *BD*, черт. 377), называется *диагональной плоскостью.*

Пирамиды бывают треугольные, четырехугольные и т. д., смотря по тому, лежит ли в основании треугольник, четырехугольник и т. д. Треугольная пирамида (черт. 376) называется иначе *тетраэдром*; у такой пирамиды все четыре грани — треугольники.

Пирамида называется п р а в и л ь н о й (черт. 377), если, во-первых, ее основание есть правильный многоугольник и, во-вторых, высота проходит через центр этого многоугольника. В правильной пирамиде все боковые ребра равны между собой (как наклонные с равными проекциями). Поэтому все боковые грани правильной пирамиды суть равные равнобедренные треугольники. Высота *SM* (черт. 377) какого-либо одного из этих треугольников называется *апофемой*. Все апофемы в одной пирамиде равны.

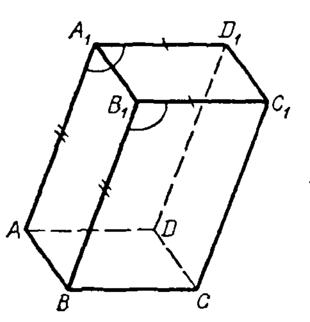
347. Усеченная пирамида. Отрезок пирамиды (черт. 378), заключенный между основанием (*ABCDE*) и секущей плоскостью ($A_1B_1C_1D_1E_1$), параллельной основанию, называется *усеченной пирамидой*. Параллельные многоугольники называются *основаниями*, а расстояние между ними OO_1 — *высотой*. Усеченная пирамида называется *правильной*, если она составляет отрезок правильной пирамиды.

Свойства граней и диагоналей параллелепипеда

348. Т е о р е м а. **В параллелепипеде противоположные грани равны и параллельны.**

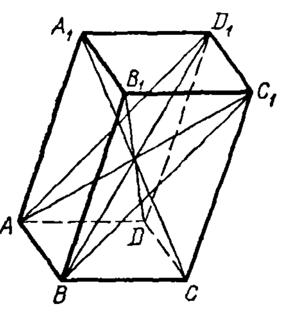
Так, грани (черт. 379) BB_1C_1C и AA_1D_1D параллельны, потому что две пересекающиеся прямые BB_1 и B_1C_1 одной грани параллельны двум пересекающимся прямым AA_1 и A_1D_1 другой (298,2); эти грани и равны, так как $B_1C_1=A_1D_1$, $B_1B=A_1A$ (как противоположные стороны параллелограммов) и $\angle BB_1C_1=\angle AA_1D_1$ (303).

349. Т е о р е м а. **В параллелепипеде все четыре диагонали пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.**



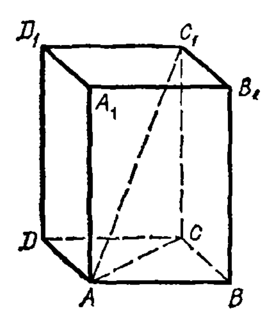
Черт. 379

Возьмем (черт. 380) какие-нибудь две диагонали, например AC_1 и BD_1, и проведем вспомогательные прямые AD_1 и BC_1. Так как ребра AB и D_1C_1 соответственно равны и параллельны ребру DC, то они равны и параллельны между собой; вследствие этого фигура AD_1C_1B есть параллелограмм (93, 2), в котором прямые C_1A и BD_1 — диагонали, а в параллелограмме диагонали делятся в точке пересечения пополам. Возьмем теперь одну из этих диагоналей, например AC_1, с третьей диагональю, положим с B_1D. Совершенно так же мы можем доказать, что они делятся в точке пересечения пополам. Следовательно, диагонали B_1D и AC_1 и диагонали AC_1 и BD_1 (которые мы раньше брали) пересекаются в одной и той же точке, именно в середине диагонали AC_1. Наконец, взяв эту же диагональ AC_1 с четвертой диагональю A_1C, мы также докажем, что и они делятся пополам. Значит, точка пересечения и этой пары диагоналей лежит в середине диагонали AC_1. Таким образом, все четыре диагонали пересекаются в одной и той же точке и делятся этой точкой пополам.



Черт. 380

350. Т е о р е м а. **В прямоугольном параллелепипеде квадрат любой диагонали (AC_1, черт. 381) равен сумме квадратов трех его измерений.**



Черт. 381

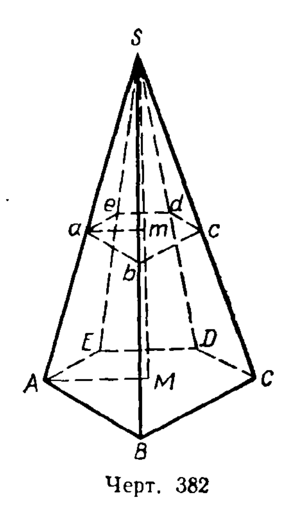
Проведя диагональ основания AC, получим два треугольника AC_1C и ABC. Оба они прямоугольные; первый потому, что параллелепипед п р я м о й и, следовательно, ребро CC_1 перпендикулярно к основанию; второй потому, что параллелепипед п р я м о у г о л ь н ы й и, значит, в основании его лежит прямоугольник. Из этих треугольников находим:

$$AC_1^2=AC^2+CC_1^2 \text{ и } AC^2=AB^2+BC^2.$$

Следовательно:

$$AC_1^2=AB^2+BC^2+CC_1^2=AB^2+AD^2+AA_1^2.$$

351. С л е д с т в и е. **В прямоугольном параллелепипеде все диагонали равны.**



Черт. 382

Свойства параллельных сечений в пирамиде

352. Т е о р е м ы. **Если пирамида** (черт. 382) **пересечена плоскостью, параллельной основанию, то:**

1) боковые ребра и высота делятся этой плоскостью на части пропорциональные;

2) в сечении получается многоугольник (*abcde*), **подобный основанию;**

3) площади сечения и основания относятся как квадраты их расстояний от вершины.

1) Прямые ab и AB можно рассматривать как пересечения двух параллельных плоскостей (основания и секущей) третьей плоскостью ASB; поэтому $ab \| AB$ (299). По этой же причине $bc \| BC$, $cd \| CD$, . . . и $am \| AM$; вследствие этого (173)

$$\frac{Sa}{aA} = \frac{Sb}{bB} = \frac{Sc}{cC} = \ldots = \frac{Sm}{mM}.$$

2) Из подобия треугольников ASB и aSb, затем BSC и bSc и т. д. выводим:

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BS}{bS}, \quad \frac{BS}{bS} = \frac{BC}{bc},$$

откуда

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc},$$

$$\frac{BC}{bc} = \frac{CS}{cS}, \quad \frac{CS}{cS} = \frac{CD}{cd},$$

откуда

$$\frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd}.$$

Также докажем пропорциональность остальных сторон многоугольников $ABCDE$ и $abcde$. Так как, сверх того, у этих многоугольников равны соответственные углы (как образованные параллельными и одинаково направленными сторонами), то они подобны.

3) Площади подобных многоугольников относятся как квадраты сходственных сторон; поэтому

$$\frac{\text{пл. } ABCDE}{\text{пл. } abcde} = \frac{AB^2}{ab^2} = \left(\frac{AB}{ab}\right)^2.$$

Но

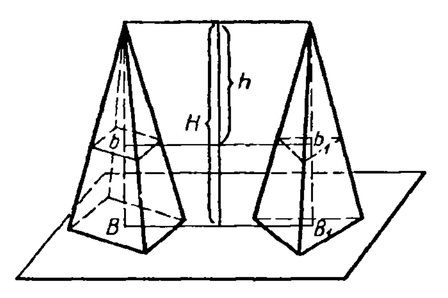
$$\frac{AB}{ab} = \frac{AS}{aS} = \frac{MS}{mS}.$$

Значит,

$$\frac{\text{пл. } ABCDE}{\text{пл. } abcde} = \left(\frac{MS}{mS}\right)^2 = \frac{MS^2}{mS^2}.$$

353. Следствие. **У правильной усеченной пирамиды верхнее основание есть правильный многоугольник, а боковые грани суть равные и равнобедренные трапеции** (черт. 378).

Высота какой-нибудь из этих трапеций называется *апофемой* правильной усеченной пирамиды.



Черт. 383

354. Теорема. **Если две пирамиды с равными высотами рассечены на одинаковом расстоянии от вершины плоскостями, параллельными основаниям, то площади сечений пропорциональны площадям оснований.**

Пусть (черт. 383) B и B_1 — площади оснований двух пирамид, H — высота каждой из них, b и b_1 — площади сечений плоскостями, параллельными основаниям и удаленными от вершин на одно и то же расстояние h (для ясности мы поставили пирамиды на одну и ту же плоскость). Тогда

$$\frac{b}{B}=\frac{h^2}{H^2} \quad \text{и} \quad \frac{b_1}{B_1}=\frac{h^2}{H^2}.$$

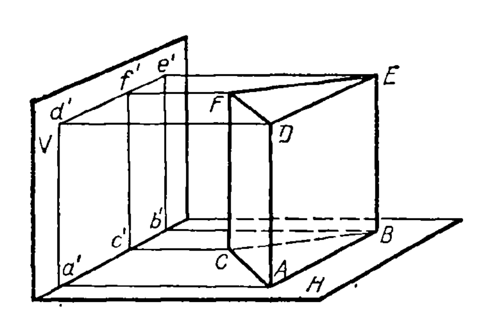
Откуда

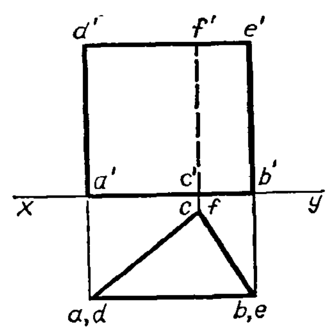
$$\frac{b}{B}=\frac{b_1}{B_1} \quad \text{или} \quad \frac{b}{b_1}=\frac{B}{B_1}.$$

355. Следствие. Если $B=B_1$, то и $b=b_1$, **т. е. если у двух пирамид с равными высотами основания равновелики, то равновелики и сечения, равноотстоящие от вершины.**

II. ПРОЕКЦИИ ПРИЗМЫ И ПИРАМИДЫ

356. Проекция прямой призмы. Пусть прямая треугольная призма поставлена основанием на горизонтальную плоскость проекций H (черт. 384). Тогда горизонтальные проекции обоих оснований совпа-





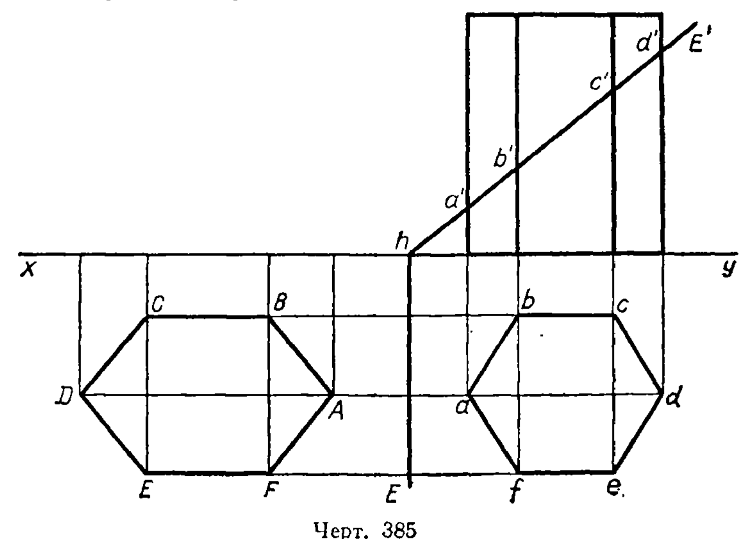
Черт. 384

дут с самим нижним основанием, а вертикальные их проекции расположатся: нижнего — на оси xy, а верхнего — на прямой, параллельной xy. Боковые ребра, будучи перпендикулярны плоскости H, проектируются на эту плоскость в виде точек, а на плоскость V в виде прямых, перпендикулярных к xy и имеющих ту же длину, как и самые ребра. Боковые грани горизонтально проектируются в виде прямых, а вертикально в виде прямоугольников.

357. **Видимые и невидимые линии.** Для более ясного представления тела, изображенного проекциями, принято линии, видимые для глаза, чертить на эпюре сплошными, а линии невидимые — пунктирными (само тело предполагается непрозрачным). Чтобы определить, какие линии на вертикальной проекции видимы и какие невидимы, надо предположить, что лицо, смотрящее на тело, очень удалено от него и от вертикальной плоскости. Тогда, конечно, передние части тела, обращенные к наблюдателю, будут видимы, а задние части, обращенные к вертикальной плоскости, будут невидимы. Равным образом, чтобы определить, какие линии на горизонтальной проекции видимы и какие невидимы, надо вообразить, что наблюдатель смотрит на тело и на горизонтальную плоскость проекций с очень большой высоты; тогда верхние части тела будут видимы, а нижние невидимы.

Таким образом, на эпюре вертикальная проекция $c'f'$ изображена пунктирной линией, так как ребро CF не видно наблюдателю, стоящему на большом расстоянии перед вертикальной плоскостью проекций.

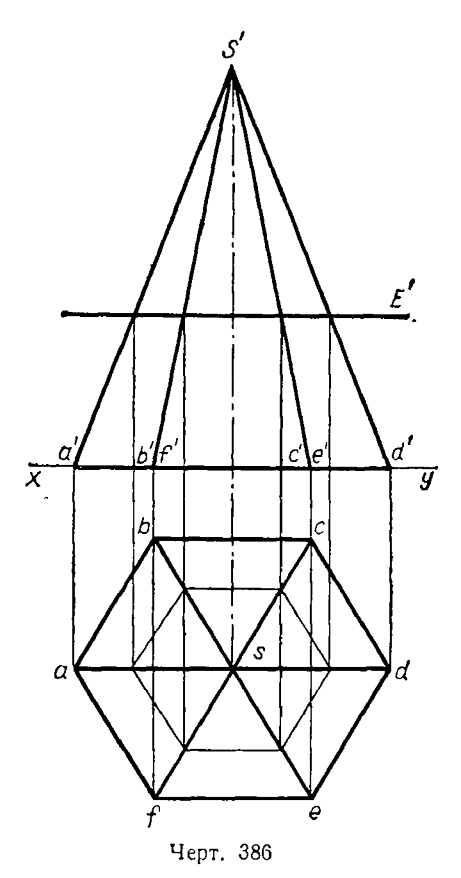
358. **Пересечение прямой призмы плоскостью, перпендикулярной к какой-нибудь плоскости проекций.** На черт. 385 мы изобразили пересечение правильной шестиугольной призмы (поставленной основанием на горизонтальную плоскость проекций) плоскостью (E, E'), перпендикулярной к вертикальной плоскости проекций.



Черт. 385

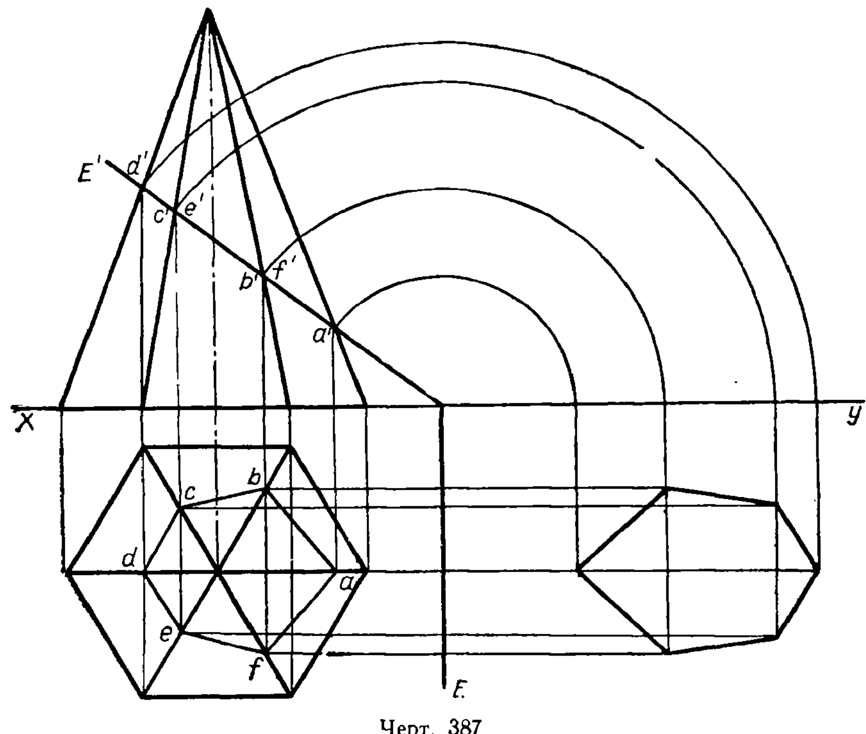
В сечении, очевидно, получается шестиугольник, горизонтальная проекция которого сливается с основанием призмы *abcdef*, а вертикальная проекция есть отрезок прямой *a'd'*, расположенный на вертикальном следе *E'* секущей плоскости. Истинную форму и величину этого шестиугольника легко получить, если плоскость (*E*, *E'*) совместить с плоскостью *H*, вращая ее вокруг следа *E*. Легко сообразить, что вершины многоугольника после его совмещения должны оказаться на продолжениях перпендикуляров, опущенных на след *E* из горизонтальных проекций *a*, *b*, *c*, . . . на таких расстояниях от оси вращения, которые равны расстояниям самих вершин от этой оси, а эти расстояния, очевидно, равны длинам *ha'*, *hb'*, . . . , *hd'*. В конечном результате истинная форма и величина сечения будет изображенный на чертеже многоугольник *ABCDEF*.

Предлагаем самим учащимся найти истинную форму и величину того же сечения, вращая секущую плоскость (*E*, *E'*) не вокруг горизонтального следа *E*, а вокруг вертикального следа *E'* до совмещения с вертикальной плоскостью проекций.



Черт. 386

359. Проекции пирамиды. На черт. 386 изображена проекциями правильная шестиугольная пирамида, поставленная основанием на горизонтальную плоскость проекций и имеющая вершину в точке (*s*, *s'*). Шестиугольник основания расположен на горизонтальной плоскости таким образом, что две его стороны параллельны оси *xy*. Вследствие этого вертикальные проекции ребер (*sb*, *s'b'*) и (*sf*, *s'f'*) сливаются в одну прямую, равно как и ребер (*sc*, *s'c'*) и (*se*, *s'e'*). Пирамида эта пересечена плоскостью, параллельной основанию (вертикальный след ее есть *E'*), и, следовательно, перпендикулярной к вертикальной плоскости проекций. В пересечении получается правильный шестиугольник (352), горизонтальная проекция которого есть также правильный шестиугольник, а вертикальная проекция — прямая, параллельная оси *xy*. Если удалим из чертежа вершину (*s*, *s'*) с примыкающими к ней отрезками боковых ребер, то получим проекции правильной усеченной пирамиды.



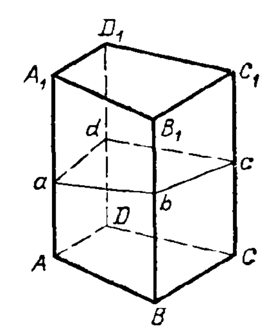
Черт. 387

На чертеже 387 мы изобразили пересечение той же правильной шестиугольной пирамиды плоскостью (E, E'), перпендикулярной к вертикальной плоскости проекций.

Вертикальные проекции точек пересечения этой плоскости с боковыми ребрами пирамиды должны лежать, во-первых, на вертикальных проекциях этих ребер и, во-вторых, на вертикальном следе E'; значит, это будут точки a', b', c' и d', в которых след E' пересекается с вертикальными проекциями ребер. Опустив из этих точек перпендикуляры на ось xy и продолжив их до пересечения с горизонтальными проекциями ребер, мы получим горизонтальные проекции a, b, c, d, e и f точек пересечения и затем горизонтальную проекцию шестиугольника, образованного пересечением плоскости (E, E') с пирамидой. Истинную форму и величину этого сечения мы получим, совместив секущую плоскость с горизонтальной плоскостью, вращая первую вокруг следа E. Совмещенное положение каждой вершины многоугольника мы получим совершенно так же, как ранее это было указано для сечения призмы (358).

Предлагаем учащимся в виде упражнения получить истинную величину и форму сечения, вращая секущую плоскость вокруг вертикального следа E' до совмещения ее с вертикальной плоскостью проекций.

III. БОКОВАЯ ПОВЕРХНОСТЬ ПРИЗМЫ И ПИРАМИДЫ



Черт. 388

360. Теорема. **Боковая поверхность призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения на боковое ребро.**

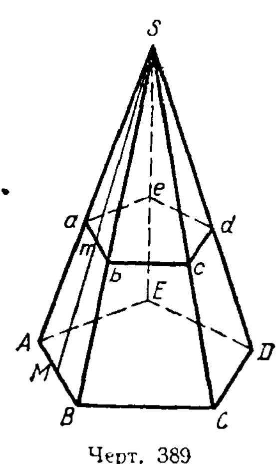
Перпендикулярным сечением (черт. 388) называется многоугольник $abcd$, получаемый от пересечения призмы плоскостью, перпендикулярной к боковым ребрам. Стороны этого многоугольника перпендикулярны к ребрам (279).

Боковая поверхность призмы представляет собой сумму площадей параллелограммов; в каждом из них за основание можно взять боковое ребро, а за высоту — сторону перпендикулярного сечения.

Поэтому

$$\text{бок. пов.} = AA_1 \cdot ab + BB_1 \cdot bc + CC_1 \cdot cd + DD_1 \cdot da = (ab + bc + cd + da) \cdot AA_1.$$

361. Следствие. **Боковая поверхность прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту,** потому что в такой призме за перпендикулярное сечение можно взять само основание, а боковое ребро ее равно высоте.



Черт. 389

362. Теорема. **Боковая поверхность правильной пирамиды равна произведению периметра основания на половину апофемы.**

Пусть (черт. 389) $SABCDE$ есть правильная пирамида и SM — ее апофема. Боковая поверхность этой пирамиды есть сумма площадей равных равнобедренных треугольников. Площадь одного из них, например ASB, равна $AB \cdot \frac{1}{2} SM$. Если всех треугольников n, то боковая поверхность выразится $AB \cdot \frac{1}{2} SM \cdot n = (AB \cdot n) \cdot \frac{1}{2} SM$, где $AB \cdot n$ есть периметр основания, а SM — апофема.

363. Теорема. **Боковая поверхность правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров обоих оснований на апофему.**

Эта поверхность есть сумма площадей равных трапеций. Площадь одной из них, например $AabB$ (черт. 389), равна $\frac{1}{2}(AB + ab) \cdot Mm$ (246). Если число всех трапеций есть n, то

$$\text{бок. пов.} = \frac{AB + ab}{2} \cdot Mm \cdot n = \frac{AB \cdot n + ab \cdot n}{2} \cdot Mm,$$

где $AB \cdot n$ и $ab \cdot n$ суть периметры нижнего и верхнего оснований.

УПРАЖНЕНИЯ

426. Высота прямой призмы, основание которой есть правильный треугольник, равна 12 м, сторона основания 3 м. Вычислить полную поверхность призмы.

427. Полная поверхность прямоугольного параллелепипеда равна 1714 кв. м, а неравные стороны основания равны 25 м и 14 м. Вычислить боковую поверхность и боковое ребро.

428. В прямоугольном параллелепипеде с квадратным основанием и высотой h проведена секущая плоскость через два противоположных боковых ребра. Вычислить полную поверхность параллелепипеда, зная, что площадь сечения равна S.

429. Правильная шестиугольная пирамида имеет сторону основания a и высоту h. Вычислить боковое ребро, апофему, боковую поверхность и полную поверхность.

430. Вычислить полную поверхность и высоту треугольной пирамиды, у которой каждое ребро равно a.

431. Правильная шестиугольная пирамида, у которой высота 25 см, а сторона основания 5 см, рассечена плоскостью параллельно основанию. Вычислить расстояние этой плоскости от вершины пирамиды, зная, что площадь сечения равна $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ кв. см.

432. Высота усеченной пирамиды с квадратным основанием равна h, сторона нижнего основания a, а верхнего b. Найти полную поверхность усеченной пирамиды.

433. Высота усеченной пирамиды равна 6, а площади оснований 18 и 8. Пирамида рассечена плоскостью, параллельной основаниям и делящей высоту пополам. Вычислить площадь сечения.

IV. ОБЪЕМ ПРИЗМЫ И ПИРАМИДЫ

364. Основные допущения об объемах. Величина части пространства, занимаемого геометрическим телом, называется *объемом* этого тела.

Относительно этой величины мы примем следующие допущения (аналогичные допущениям о площадях, указанных нами в § 237):

1. Равные тела, т. е. совмещающиеся при вложении, имеют равные объемы независимо от их положения в пространстве.

2. Объем какого-нибудь тела (например, каждого параллелепипеда, изображенного на черт. 390), состоящего из частей (P и Q), принимается за с у м м у о б ъ е м о в этих частей.

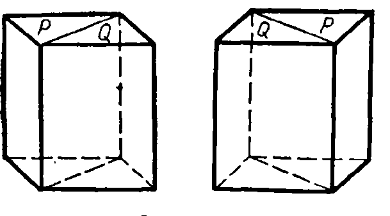
3. Если тела (например, параллелепипеды, черт. 390) р а з л о ж е н ы на одинаковое число частей, соответственно друг другу равных, то объемы этих тел считаются равными независимо от того, как расположены эти части относительно друг друга.

Таким образом, могут быть тела, которые нельзя назвать равными (так как они не совмещаются), но которые, однако, имеют равные объемы. Такие тела называются *равновеликими*. Таковы, например, два параллелепипеда, изображенные на черт. 390.

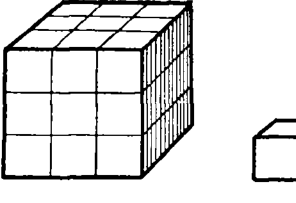
4. Тела считаются равновеликими и тогда, когда они могут быть дополнены равными телами таким образом, что образуются суммы, равные между собой. Мы вскоре увидим этому пример.

5. Из двух неравновеликих тел объем того тела считается меньшим, которое равновелико какой-нибудь части другого тела.

365. Единица объема. За единицу объемов (при измерении их) берут объем такого куба, у которого каждое ребро равно линейной единице. Так, употребительны кубический метр, кубический сантиметр и т. д.



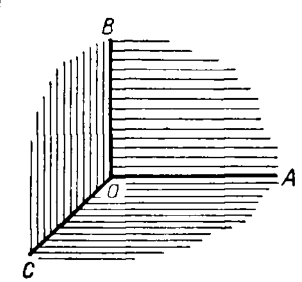
Черт. 390


Черт. 391

Отношение двух кубических единиц разных названий равно 3-й степени отношения тех линейных единиц, которые служат ребрами для этих кубических единиц. Так, отношение куб. сажени к куб. аршину равно 3^3, т. е. 27, что ясно видно из черт. 391, на котором меньший из двух кубов изображает куб. аршин, а больший — куб. сажень.

366. Замечание о числе, измеряющем объем. Относительно числа, измеряющего данный объем в кубических единицах, можно сделать разъяснение, аналогичное тому, какое было нами приведено в § 239 относительно числа, измеряющего данную площадь в квадратных единицах. Повторим вкратце это разъяснение в применении к объемам.

Возьмем три взаимно перпендикулярные прямые (черт. 392) OA, OB и OC и через каждые две из них проведем плоскость. Мы получим тогда три взаимно перпендикулярные плоскости AOC, COB и BOA. Вообразим теперь три ряда параллельных плоскостей: ряд плоскостей, параллельных плоскости AOC, другой ряд плоскостей, параллельных плоскости BOA, и третий ряд плоскостей, параллельных плоскости BOC; допустим, кроме того, что соседние плоскости каждого ряда отстоят одна от другой на одно и то же расстояние, равное какой-нибудь $\frac{1}{k}$ доле линейной единицы. Тогда от взаимного пересечения этих трех рядов плоскостей образуется п р о с т р а н с т в е н н а я   с е т ь   к у б о в, из которых каждый представляет собой $\left(\frac{1}{k}\right)^3$ часть куб. единицы. Вообразим, что в эту сеть мы поместили то тело, объем которого желаем измерить. Тогда все кубы сети мы можем подразделить на три рода: 1) кубы, которые расположены вполне внутри тела, 2) кубы, которые некоторой частью выступают из тела (которые, другими словами, пересекаются поверхностью тела), и 3) кубы, расположенные вполне вне тела. Если кубов 1-го рода будет m, а 2-го рода n, то объем данного тела более $\frac{m}{k^3}$, но менее $\frac{m+n}{k^3}$ куб. единиц. Значит, эти два числа будут приближенные меры данного объема с точностью до $\frac{n}{k^3}$ куб. единиц, первое число с недостатком, второе — с избытком. Уменьшая все более и более расстояние между параллельными плоскостями, мы будем заполнять пространство все меньшими и меньшими кубами и будем получать приближенные результаты измерения все с боль-



Черт. 392

шей и большей точностью; и если будет найдено такое число V (рациональное или иррациональное), которое окажется больше любого приближенного результата измерения, взятого с недостатком, но меньше любого приближенного результата измерения, взятого с избытком, то это число принимается за **точную меру** данного объема.

Доказано, что такое число существует для всякого объема и что оно не зависит от выбора тех трех прямых OA, OB и OC (черт. 392), которые были взяты для построения пространственной сети кубов [1]. Число это обладает следующими двумя основными свойствами: при одной и той же кубической единице: 1) равным телам (совмещающимся) соответствуют равные числа, 2) сумме объемов соответствует сумма чисел. Отсюда уже следует, что большему объему соответствует большее число, равновеликим телам соответствуют равные числа и т. п.

Объем прямоугольного параллелепипеда

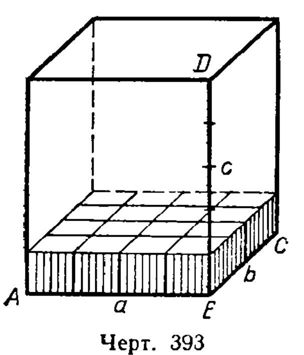
367. Теорема. Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений.

В таком кратком выражении теорему эту надо понимать так: число, выражающее объем прямоугольного параллелепипеда в кубической единице, равно произведению чисел, выражающих три его измерения в соответствующей линейной единице, т. е. в той единице, которая служит ребром куба, объем которого принят за кубическую единицу. Так, если x есть число, выражающее объем прямоугольного параллелепипеда в кубических сантиметрах, а a, b и c — числа, выражающие три его измерения в линейных сантиметрах, то теорема утверждает, что $x=abc$.

При доказательстве рассмотрим особо следующие три случая:

1. Измерения выражаются **целыми числами**.

Пусть, например, измерения будут (черт. 393): $AB=a$, $BC=b$ и $BD=c$, где a, b и c — какие-нибудь целые числа (например, как изображено у нас на чертеже: $a=4$, $b=4$ и $c=5$). Тогда основание параллелепипеда содержит ab таких квадратов, из которых каждый представляет собой соответствующую квадратную единицу. На каждом из этих квадратов, очевидно, можно поместить по одной кубической единице. Тогда получится слой (изображенный на чертеже), состоящий из ab кубических единиц. Так как высота этого слоя равна 1 линейной единице, а высота всего параллелепипеда содержит c таких единиц, то внутри параллелепипеда можно поместить c таких слоев.



Черт. 393

Следовательно, объем его равен abc кубических единиц.

2. Измерения выражаются **дробными числами**.

[1] См., например: Killing H. und Hovestadt. Handbuch des mathematischen Unterrichts, I

Пусть измерения параллелепипеда будут:

$$\frac{m}{n}, \quad \frac{p}{q}, \quad \frac{r}{s}$$

(некоторые из этих дробей могут равняться целому числу).

Приведя дроби к одинаковому знаменателю, будем иметь:

$$\frac{mqs}{nqs}, \quad \frac{pns}{nqs}, \quad \frac{rnq}{nqs}.$$

Примем $^1/_{nqs}$ долю линейной единицы за новую (вспомогательную) единицу длины. Тогда в этой новой единице данные измерения выразятся целыми числами, а именно mqs, pns и rnq, и потому, по доказанному в случае 1-м, объем параллелепипеда равен произведению:

$$(mqs)(pns)(rnq),$$

если измерять этот объем новой кубической единицей, соответствующей новой линейной единице. Таких кубических единиц в одной кубической единице, соответствующей прежней линейной единице, содержится $(nqs)^3$; значит, новая кубическая единица составляет $\frac{1}{(nqs)^3}$ прежней. Поэтому объем параллелепипеда, выраженный в прежних единицах, равен:

$$\frac{1}{(nqs)^3}\cdot(mqs)(pns)(rnq)=\frac{mqs}{nqs}\cdot\frac{pns}{nqs}\cdot\frac{rnq}{nqs}=\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}.$$

3. Измерения выражаются иррациональными числами.

Пусть у данного параллелепипеда (черт. 394), который для краткости мы обозначим одной буквой Q, измерения будут:

$$AB=\alpha, \quad AC=\beta, \quad AD=\gamma,$$

где все числа α, β, γ или только некоторые из них иррациональные. Найдем приближенные значения этих чисел с точностью до $\frac{1}{n}$. Для этого отложим долю линейной единицы на измерениях AB, AC, AD, начиная от точки A, столько раз, сколько можно. Пусть окажется, что, отложив эту долю на AB m раз, мы получим отрезок $AB_1<AB$, а отложив эту же долю $m+1$ раз, получим отрезок $AB_2>AB$. Тогда приближенные значения числа α с точностью до $\frac{1}{n}$ будут дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{m+1}{n}$, первая с недостатком, вторая с избытком. Пусть таким же образом окажется, что

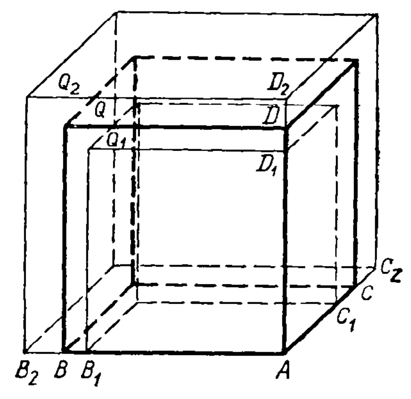
$$AC_1=\frac{p}{n} \text{ и } AC_2=\frac{p+1}{n},$$

причем $AC_1 < AC < AC_2$

и

$$AD_1=\frac{q}{n} \text{ и } AD_2=\frac{q+1}{n},$$

причем $AD_1 < AD < AD_2$.



Черт. 394

Тогда приближенные значения будут:

для числа α $\frac{m}{n}$, $\frac{m+1}{n}$;

для числа β $\frac{p}{n}$, $\frac{p+1}{n}$;

для числа γ $\frac{q}{n}$, $\frac{q+1}{n}$.

Построим теперь два вспомогательных параллелепипеда: один (обозначим его Q_1) с измерениями AB_1, AC_1 и AD_1 и другой (обозначим его Q_2) с измерениями AB_2, AC_2 и AD_2. Тогда по доказанному в случае 2-м будем иметь:

$$\text{об. } Q_1 = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{n} \cdot \frac{q}{n}; \quad \text{об. } Q_2 = \frac{m+1}{n} \cdot \frac{p+1}{n} \cdot \frac{q+1}{n}.$$

Пусть число, выражающее искомый объем Q, будет x.

Так как, очевидно, Q_1 составляет часть Q, а Q составляет часть Q_2, то

$$\text{об. } Q_1 < \text{об. } Q < \text{об. } Q_2;$$

следовательно, и

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{n} \cdot \frac{q}{n} < x < \frac{m+1}{n} \cdot \frac{p+1}{n} \cdot \frac{q+1}{n}.$$

Это двойное неравенство остается верным при всякой степени точности, с которой мы находим приближенные значения чисел α, β и γ. Значит, неравенство это мы можем высказать так: число, измеряющее объем данного параллелепипеда, должно быть больше произведения любых приближенных значений чисел α, β и γ, если эти значения взяты с недостатком, но меньше произведения любых приближенных значений тех же чисел, если эти значения взяты с избытком. Такое число, как известно из алгебры, называется произведением иррациональных чисел $\alpha\beta\gamma$. Значит, и в этом случае объем $Q = \alpha\beta\gamma$.

368. Следствие. Пусть измерения прямоугольного параллелепипеда, служащие сторонами его основания, выражаются числами a и b, а третье измерение (высота) — числом c. Тогда, обозначая объем его в соответствующих кубических единицах буквой V, можем, по доказанному, написать:

$$V = abc.$$

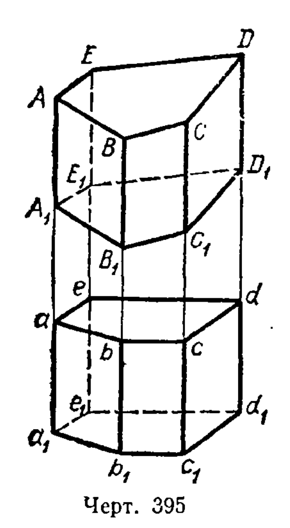
Так как произведение ab выражает площадь основания, то можно сказать, что **объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.**

Объем всякого параллелепипеда

369. Лемма. **Наклонная призма равновелика такой прямой призме, у которой основание равно перпендикулярному сечению наклонной призмы, а высота — ее боковому ребру.**

Пусть дана наклонная призма $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ (черт. 395). Продолжим все ее боковые ребра и боковые грани в одном направлении. Возьмем на продолжении одного какого-нибудь ребра произвольную точку a и проведем через нее перпендикулярное сечение $abcde$.

Затем, отложив $aa_1=AA_1$, проведем через a_1 перпендикулярное сечение $a_1b_1c_1d_1e_1$. Так как плоскости обоих сечений параллельны, то $bb_1=cc_1=dd_1=ee_1=aa_1=AA_1$ (301). Вследствие этого многогранник a_1d, у которого за основания приняты проведенные нами сечения, есть **п р я м а я п р и з м а**, о которой говорится в теореме. Докажем, что данная наклонная призма равновелика этой прямой. Для этого предварительно убедимся, что многогранники aD и a_1D_1 равны. Основания их $abcde$ и $a_1b_1c_1d_1e_1$ равны, как основания призмы a_1d; с другой стороны, приложив к обеим частям равенства $A_1A=a_1a$ по одной и той же прямой A_1a, получим: $aA=a_1A_1$; подобно этому $bB=b_1B_1$, $cC=c_1C_1$ и т. д. Вообразим теперь, что многогранник aD вложен в a_1D_1 так, чтобы основания их совпали; тогда боковые ребра, будучи перпендикулярны к основаниям и соответственно равны, также совпадут; поэтому многогранник aD совместится с a_1D_1; значит, эти тела равны. Теперь заметим, что если к прямой призме a_1d добавим многогранник aD, а к наклонной призме A_1D добавим многогранник a_1D_1, то получим один и тот же многогранник a_1D_1. Из этого следует, что две призмы равновелики.



Черт. 395

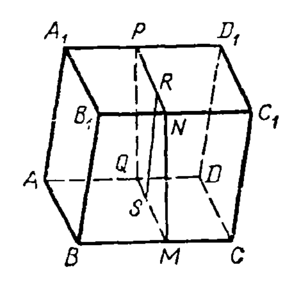
Черт. 396

370. Т е о р е м а. Объем параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.

Ранее мы доказали эту теорему для параллелепипеда прямоугольного, теперь докажем ее для параллелепипеда п р я м о г о, а потом и н а к л о н н о г о.

1. Пусть (черт. 396) AC_1 — прямой параллелепипед, т. е. такой, у которого основание $ABCD$ — какой-нибудь параллелограмм, а все боковые грани — прямоугольники. Возьмем в нем за основание боковую грань AA_1B_1B; тогда параллелепипед будет н а к л о н н ы й. Рассматривая его как частный случай наклонной призмы, мы на основании леммы предыдущего параграфа можем утверждать, что этот параллелепипед равновелик такому прямому, у которого основание есть перпендикулярное сечение $MNPQ$, а высота BC. Четырехугольник $MNPQ$ есть прямоугольник, потому что его углы служат линейными углами прямых двугранных углов; поэтому прямой параллелепипед, имеющий это основание, должен быть п р я м о у г о л ь н ы м, и, следовательно, его объем равен произведению трех его измерений, за которые можно принять отрезки MN, MQ и BC. Таким образом,

$$\text{объем } AC_1 = MN \cdot MQ \cdot BC = MN \cdot (MQ \cdot BC).$$



Черт. 397

Но произведение $MQ \cdot BC$ выражает площадь параллелограмма $ABCD$; поэтому

$$\text{об. } AC_1 = (\text{пл. } ABCD) \cdot MN = (\text{пл. } ABCD) \cdot BB_1.$$

2. Пусть (черт. 397) AC_1 есть параллелепипед наклонный. Он равновелик такому прямому, у которого основанием служит перпендикулярное сечение $MNPQ$ (т. е. перпендикулярное к ребрам AD, BC, . . .), а высотой — ребро BC. Но, по доказанному, объем прямого параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту; значит,

$$\text{об. } AC_1 = (\text{пл. } MNPQ) \cdot BC.$$

Если RS есть высота сечения $MNPQ$, то площадь $MNPQ = MQ \cdot RS$; поэтому

$$\text{об. } AC_1 = MQ \cdot RS \cdot BC = (BC \cdot MQ) \cdot RS.$$

Произведение $BC \cdot MQ$ выражает площадь параллелограмма $ABCD$; следовательно,

$$\text{об. } AC_1 = (\text{пл. } ABCD) \cdot RS.$$

Остается теперь доказать, что отрезок RS представляет собой высоту параллелепипеда. Действительно, сечение $MNPQ$, будучи перпендикулярно к ребрам BC, B_1C_1, . . . , должно быть перпендикулярно к граням $ABCD$, BB_1C_1C, . . . , проходящим через эти ребра (310). Поэтому если мы из точки S восставим перпендикуляр к плоскости $ABCD$, то он должен лежать весь в плоскости $MNPQ$ (311) и, следовательно, должен слиться с прямой SR, лежащей в этой плоскости и перпендикулярной к MQ. Значит, отрезок SR есть высота параллелепипеда. Таким образом, объем и наклонного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.

371. Следствие. Если V, B и H суть числа, выражающие в соответствующих единицах объем, площадь основания и высоту параллелепипеда, то можем писать:

$$V = BH.$$

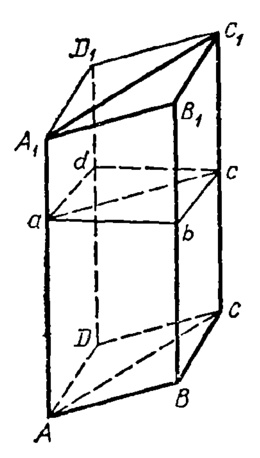
Объем призмы

372. Теорема. **Объем призмы равен произведению площади основания на высоту.**

Сначала докажем эту теорему для треугольной призмы, а потом и для многоугольной.

1. Проведем (черт. 398) через ребро AA_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскость, параллельную грани BB_1C_1C, а через ребро CC_1 плоскость, параллельную грани AA_1B_1B; затем продолжим плоскости обоих оснований призмы до пересечения с ранее проведенными плоскостями. Тогда мы получим параллелепипед BD_1, который диагональной плоскостью AA_1C_1C делится на две треугольные призмы (из

них одна есть данная). Докажем, что эти призмы равновелики. Для этого проведем перпендикулярное сечение *abcd*. В сечении получится параллелограмм, который диагональю *ac* делится на два равных треугольника. Данная призма равновелика такой прямой призме, у которой основание есть $\triangle abc$, а высота — ребро AA_1 (369). Другая треугольная призма равновелика такой прямой, у которой основание есть $\triangle adc$, а высота — ребро AA_1. Но две прямые призмы с равными основаниями и равными высотами равны (потому что при вложении они совмещаются); значит, призмы $ABCA_1B_1C_1$ и $ADCA_1D_1C_1$ равновелики. Из этого следует, что объем данной призмы составляет половину объема параллелепипеда BD_1; поэтому, обозначив высоту через H, получим:

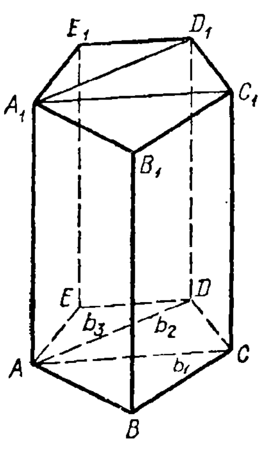


Черт. 398

$$\text{объем треуг. призмы} = \frac{\text{пл. } (ABCD)\, H}{2} =$$

$$= \frac{\text{пл. } ABCD}{2} \cdot H = (\text{пл. } \ ABC)\, H.$$

2. Проведем через ребро AA_1 многоугольной призмы (черт. 399) диагональные плоскости AA_1C_1C и AA_1D_1D. Тогда данная призма рассечется на несколько треугольных призм. Сумма объемов этих призм составляет искомый объем. Если обозначим площади их оснований через b_1, b_2, b_3, а общую высоту через H, то получим:



Черт. 399

$$\text{объем мн. призмы} = b_1H + b_2H + b_3H =$$
$$= (b_1 + b_2 + b_3)H = (\text{пл. } \ ABCDE)H.$$

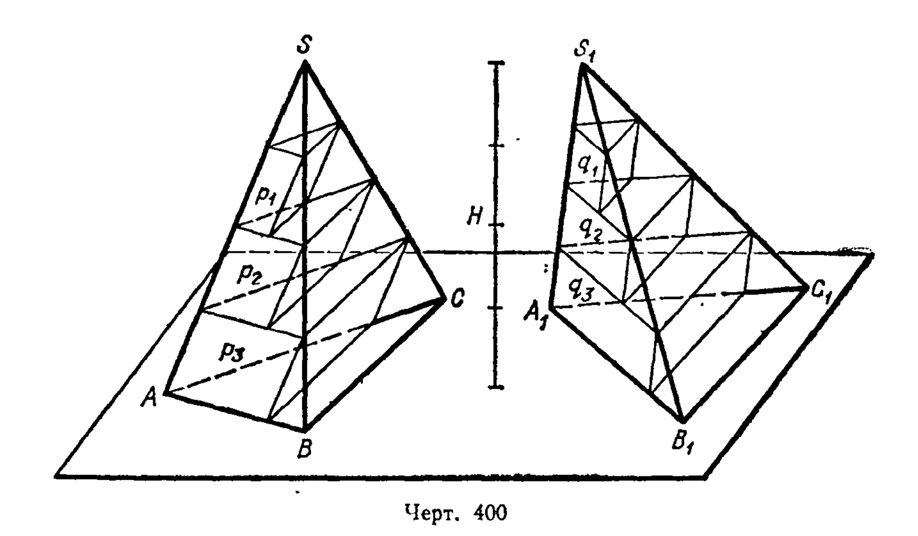
373. Следствие. Если V, B и H будут числа, выражающие в соответственных единицах объем, площадь основания и высоту призмы, то, по доказанному, можем писать:

$$V = BH.$$

Объем пирамиды

374. Лемма. **Треугольные пирамиды с равновеликими основаниями** (ABC и $A_1B_1C_1$, черт. 400) **и равными высотами равновелики.**

Доказательство наше будет состоять из трех частей. В I части мы докажем равновеликость не самих пирамид, а вспомогательных тел, составленных из ряда треугольных призм, поставленных друг на друга. Во II части мы покажем, что объемы этих вспомогательных тел при увеличении числа составляющих их призм приближаются к объемам



Черт. 400

пирамид как угодно близко. Наконец, в III части мы убедимся, что сами пирамиды должны быть равновелики.

I. Вообразим, что пирамиды поставлены основаниями на некоторую плоскость (как изображено на черт. 400); тогда их вершины будут находиться на одной прямой, параллельной плоскости оснований, и высота пирамид может быть изображена одной и той же прямой H. Разделим эту высоту на какое-нибудь число n равных частей (например, на 4, как это указано на чертеже) и через точки деления проведем ряд плоскостей, параллельных плоскости оснований. Плоскости эти, пересекаясь с пирамидами, дают в сечениях ряд треугольников, причем треугольники пирамиды S будут равновелики соответствующим треугольникам пирамиды S_1 (355). Построим внутри каждой пирамиды ряд призм таких, чтобы верхними основаниями у них были треугольники сечений, боковые ребра были параллельны ребру SA в одной пирамиде и ребру S_1A_1 в другой, а высота каждой призмы равнялась бы $\frac{1}{n}H$. Таких призм в каждой пирамиде окажется n—1; они образуют собой некоторое ступенчатое тело, объем которого, очевидно, меньше объема той пирамиды, в которой призмы построены. Обозначим объемы призм пирамиды S по порядку, начиная от вершины, буквами p_1, p_2, p_3, . . . , p_{n-1}, а объемы призм пирамиды S_1, также по порядку от вершины, буквами q_1, q_2, q_3, . . . , q_{n-1}; тогда, принимая во внимание, что у каждой пары соответствующих призм (у p_1 и q_1, у p_2 и q_2 и т. д.) основания равновелики и высоты равны, мы можем написать ряд равенств:

$$p_1=q_1, \ p_2=q_2, \ p_3=q_3, \ \ldots, \ p_{n-1}=q_{n-1}.$$

Сложив все равенства почленно, найдем:

$$p_1+p_2+p_3+\ldots+p_{n-1}=q_1+q_2+q_3+\ldots+q_{n-1}. \qquad (1)$$

Мы доказали таким образом, что объемы построенных нами вспомогательных ступенчатых тел равны между собой (при всяком числе n, на которое мы делим высоту H).

II. Обозначив объемы пирамид S и S_1 соответственно буквами V и V_1, положим, что

$$V-(p_1+p_2+p_3+\ldots+p_{n-1})=x$$

и

$$V_1-(q_1+q_2+q_3+\ldots+q_{n-1})=y;$$

откуда

$$p_1+p_2+p_3+\ldots+p_{n-1}=V-x$$

и

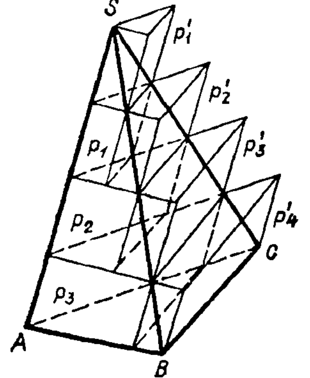
$$q_1+q_2+q_3+\ldots+q_{n-1}=V_1-y.$$

Тогда равенство (1) мы можем выразить так:

$$V-x=V_1-y. \qquad (2)$$

Предположим теперь, что число n равных частей, на которые мы делим высоту H, неограниченно возрастает; например, предположим, что, вместо того чтобы делить высоту на 4 равные части, мы разделим ее на 8 равных частей, потом на 16, на 32 и т. д. и пусть каждый раз мы строим указанным образом ступенчатые тела в обеих пирамидах. Как бы ни возросло число призм, составляющих ступенчатые тела, равенство (1), а следовательно, и равенство (2) остается в полной силе. При этом объемы V и V_1, конечно, не будут изменяться, тогда как величины x и y, показывающие, на сколько объемы пирамид превосходят объемы соответствующих ступенчатых тел, будут, очевидно, все более и более уменьшаться. Докажем, что величины x и y будут при этом не просто уменьшаться, но что они могут сделаться как угодно малы (другими словами, что они с т р е м я т с я к н у л ю). Это достаточно доказать для какой-нибудь одной из двух величин x и y, например для x.

С этой целью построим в пирамиде S (черт. 401) еще другой ряд призм, который составит тоже ступенчатое тело, но по объему большее пирамиды. Призмы эти мы построим так же, как строили внутренние призмы, с той только разницей, что треугольники сечений мы теперь примем не за верхние основания призм, а за нижние. Вследствие этого мы получим теперь ряд призм, которые некоторой своей частью будут выступать из пирамид наружу, и потому они образуют новое ступенчатое тело с объемом большим, чем объем пирамиды. Таких призм будет теперь не $n-1$, как внутренних призм, а n. Обозначим их объемы по порядку, начиная от вершины, буквами: p'_1, p'_2, p'_3, . . . , p'_{n-1}, p'_n.



Черт. 401

Рассматривая чертеж, мы легко заметим, что

$$p'_1=p_1,\ p'_2=p_2,\ p'_3=p_3,\ \ldots,\ p'_{n-1}=p_{n-1}.$$

Поэтому

$$(p'_1+p'_2+p'_3+\ldots+p'_{n-1}+p'_n)-(p_1+p_2+p_3+\ldots+p_{n-1})=p'_n.$$

Так как

$$p'_1+p'_2+p'_3+\ldots+p'_{n-1}+p'_n>V,$$

а

$$p_1+p_2+p_3+\ldots+p_{n-1}<V,$$

то

$$V-(p_1+p_2+p_3+\ldots+p_{n-1})<p'_n,$$

т. е.

$$x<p'_n.$$

Но $p'_n=\text{пл. } ABC\cdot\frac{1}{n}H$ (если ABC есть основание); поэтому

$$x<\text{пл. } ABC\cdot\frac{1}{n}H.$$

При неограниченном возрастании числа n величина $\frac{1}{n}H$, очевидно, может быть сделана как угодно малой (стремится к нулю). Поэтому и произведение пл. $ABC\cdot\frac{1}{n}H$, в котором множимое не изменяется, а множитель стремится к нулю, тоже стремится к нулю, и так как величина x меньше этого произведения, то она и подавно стремится к нулю.

То же самое рассуждение можно было бы повторить и о величине y.

Мы доказали таким образом, что при неограниченном увеличении числа призм объемы наших вспомогательных ступенчатых тел приближаются к объемам своих пирамид как угодно близко.

III. Заметив это, возьмем написанное выше равенство (2) и придадим ему такой вид:

$$V-V_1=x-y. \quad (3)$$

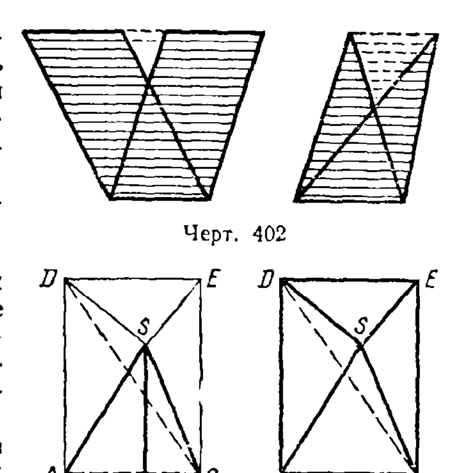
Докажем теперь, что это равенство возможно только тогда, когда $V=V_1$ и $x=y$. Действительно, разность $V-V_1$, как всякая разность постоянных (неизменяющихся) величин, должна равняться или какой-нибудь постоянной величине, или же нулю; разность же $x-y$, как всякая разность между переменными (изменяющимися) величинами, стремящимися к нулю, должна или равняться некоторой переменной величине (стремящейся к нулю), или равняться нулю. Так как постоянная величина не может равняться переменной, то из этих возможностей надо оставить только одну: и разность $V-V_1=0$, и разность $x-y=0$, но тогда $V=V_1$ и $x=y$.

Мы доказали таким образом, что рассматриваемые пирамиды равновелики.

375. Закон Кавальери. Доказанная лемма составляет частный случай следующего предложения (известного под названием закона или принципа Кавальери)[1]: ***если два тела*** (ограниченные

[1] Кавальери — итальянский математик XVII столетия.

плоскостями или кривыми поверхностями — все равно) **могут быть помещены в такое положение, при котором всякая плоскость, параллельная какой-нибудь данной плоскости и пересекающая оба тела, дает в сечении с ними равновеликие фигуры, то объемы таких тел одинаковы.**



Черт. 402

Черт. 403

Условиям этого предложения удовлетворяют две треугольные пирамиды с равновеликими основаниями и равными высотами, о которых говорилось в лемме предыдущего параграфа. Действительно, поставив основания пирамид на одну плоскость, мы поместили их в такое положение, при котором всякая плоскость, параллельная плоскости оснований и пересекающая пирамиды, дает в сечении с ними равновеликие треугольники; и мы доказали, что объемы таких пирамид одинаковы.

Доказательство принципа Кавальери, довольно сложное даже в частном случае треугольных пирамид, выходит из пределов элементарной геометрии, если его понимать во всей его полноте (для всяких тел) [1]. Впрочем, содержание принципа настолько просто и понятно, что в некоторых руководствах геометрии его принимают без доказательства.

Заметим, что закон Кавальери применим и в планиметрии (для площадей), а именно **если две плоские фигуры могут быть помещены в такое положение, что всякая прямая, параллельная какой-нибудь данной прямой и пересекающая обе фигуры, дает в сечении с ними равные отрезки, то такие фигуры равновелики.**

Примером могут служить два параллелограмма или два треугольника (черт. 402) с равными основаниями и равными высотами.

Одно из интересных применений закона Кавальери (к нахождению объема шара) будет нами указано позже (438).

376. Т е о р е м а. **Объем пирамиды равен произведению площади основания на треть высоты.**

Сначала докажем эту теорему для пирамиды т р е у г о л ь н о й, а затем и м н о г о у г о л ь н о й.

1. На основании треугольной пирамиды $SABC$ (черт. 403) построим такую призму $ABCDSE$, у которой высота равна высоте пирамиды, а одно боковое ребро совпадает с ребром SB. Докажем, что объем пирамиды составляет третью часть объема этой призмы. Отделим от

---

[1] Доказательство изложено у K i l l i n g W. und H o v e s t a d t. Handbuch des mathematischen Unterrichts, II, c. 261.

призмы данную пирамиду. Тогда останется четырехугольная пирамида $SADEC$ (которая для ясности изображена отдельно). Проведем в ней секущую плоскость через вершину S и диагональ основания DC. Получившиеся от этого две треугольные пирамиды имеют общую вершину S и равные основания DEC и DAC, лежащие в одной плоскости; значит согласно доказанной выше лемме пирамиды эти равновелики. Сравним одну из них, именно $SDEC$, с данной пирамидой. За основание пирамиды $SDEC$ можно взять $\triangle SDE$, тогда вершина ее будет в точке C и высота равна высоте данной пирамиды. Так как $\triangle SDE = \triangle ABC$, то согласно той же лемме пирамиды $CSDE$ и $SABC$ равновелики. Таким образом, сумма объемов трех пирамид, равновеликих данной, составляет объем призмы; следовательно,

$$\text{об. } SABC = \frac{1}{3}\text{об. } DSEABC = \frac{(\text{пл. } ABC)\cdot H}{3} = (\text{пл. } ABC)\cdot\frac{H}{3},$$

где H означает высоту пирамиды [1].

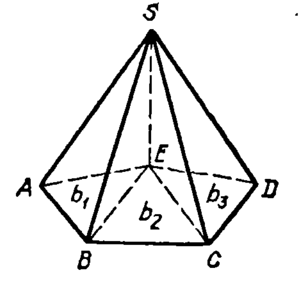
2. Через какую-нибудь вершину E (черт. 404) основания многоугольной пирамиды $SABCDE$ проведем диагонали EB и EC. Затем через ребро SE и каждую из этих диагоналей проведем секущие плоскости. Тогда многоугольная пирамида разобьется на несколько треугольных, имеющих высоту, общую с данной пирамидой. Обозначив площади оснований треугольных пирамид через b_1, b_2, b_3 и высоту через H, будем иметь:

$$\text{об. } SABCDE = \frac{1}{3}b_1H + \frac{1}{3}b_2H + \frac{1}{3}b_3H =$$
$$= (b_1 + b_2 + b_3)\cdot\frac{H}{3} = (\text{пл. } ABCDE)\cdot\frac{H}{3}.$$

377. Следствие. Если V, B и H означают числа, выражающие в соответственных единицах объем, площадь основания и высоту какой угодно пирамиды, то

$$V = \frac{1}{3}BH.$$

378. Теорема. **Объем усеченной пирамиды равен сумме объемов трех пирамид, имеющих высоту, одинаковую с высотой усеченной пирамиды, а основаниями: одна — нижнее основание этой пирамиды, другая — верхнее основание, а третья — среднее пропорциональное между ними.**

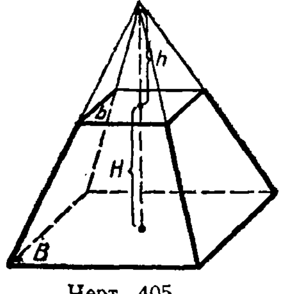


Черт. 404

[1] Объем треугольной пирамиды можно найти и независимо от леммы предыдущего параграфа посредством формулы для суммы квадратов натуральных чисел; его можно также определить с помощью так называемой первообразной функции. Оба эти вывода изложены в книге: Киселев А. Элементы алгебры и анализа, ч. 2, § 315 и 381.

Пусть площади оснований усеченной пирамиды (черт. 405) будут B и b, высота H и объем V (усеченная пирамида может быть треугольная или многоугольная — все равно). Требуется доказать, что

$$V=\frac{1}{3}BH+\frac{1}{3}bH+\frac{1}{3}H\sqrt{Bb}=$$
$$=\frac{1}{3}H(B+b+\sqrt{Bb}),$$



Черт. 405

где $\sqrt{Bb}$ есть средняя пропорциональная величина[1] между B и b (206,4). Для доказательства на меньшем основании поместим такую малую пирамиду, чтобы усеченная превратилась в полную. Тогда объем V мы можем рассматривать как разность двух объемов: полной пирамиды и верхней дополнительной. Обозначив высоту дополнительной пирамиды буквой h, мы найдем, что

$$V=\frac{1}{3}B(H+h)-\frac{1}{3}bh=\frac{1}{3}(BH+Bh-bh)=\frac{1}{3}[BH+(B-b)h].$$

Для нахождения высоты h воспользуемся теоремой § 352, согласно которой мы можем написать уравнение

$$\frac{B}{b}=\frac{(H+h)^2}{h^2}.$$

Для упрощения этого уравнения извлечем из обеих частей его арифметический квадратный корень:

$$\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{b}}=\frac{H+h}{h}.$$

Из этого уравнения (которое можно рассматривать как пропорцию) получим:

$$h\sqrt{B}=(H+h)\sqrt{b}=H\sqrt{b}+h\sqrt{b}.$$

Откуда $(\sqrt{B}-\sqrt{b})h=H\sqrt{b}$, и, следовательно,

$$h=\frac{H\sqrt{b}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}.$$

Подставив это выражение в формулу, выведенную нами для объема V, найдем:

$$V=\frac{1}{3}\left[BH+\frac{(B-b)H\sqrt{b}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}\right].$$

---

[1] Конечно, здесь разумеется с р е д н я я г е о м е т р и ч е с к а я величина между B и b.

Так как $B-b=(\sqrt{B}+\sqrt{b})(\sqrt{B}-\sqrt{b})$, то по сокращении дроби на разность $\sqrt{B}-\sqrt{b}$ получим:

$$V=\frac{1}{3}[BH+(\sqrt{B}+\sqrt{b})H\sqrt{b}]=\frac{1}{3}(BH+H\sqrt{Bb}+bH)=$$
$$=\frac{1}{3}H(B+b+\sqrt{Bb}),$$

т. е. получим ту формулу, которую требовалось доказать.

379. Замечание. Теорему эту можно доказать чисто геометрически, не прибегая к алгебраическим выкладкам, а именно можно доказать, что т р е у г о л ь н а я усеченная пирамида рассекается диагональными плоскостями на три полные пирамиды, объемы которых и будут те самые, какие указаны в теореме. Мы предпочли, однако, алгебраический вывод, потому что, во-первых, он проще геометрического и, во-вторых, он прямо доказывает теорему для усеченной пирамиды с любым числом сторон, а не только треугольной.

V. ПОДОБИЕ МНОГОГРАННИКОВ

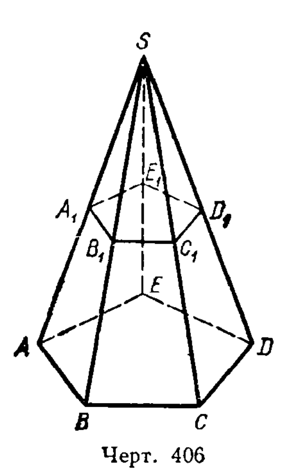
380. Определение. Два многогранника называются *подобными*, если они имеют соответственно равные многогранные углы и соответственно подобные грани. Соответственные элементы подобных многогранников называются *сходственными*.

Из этого определения следует, что в подобных многогранниках:

1. Двугранные углы соответственно равны и одинаково расположены, потому что многогранные углы равны.

2. Сходственные ребра пропорциональны, потому что в каждых двух подобных гранях отношение сходственных ребер одно и то же и в каждом многограннике соседние грани имеют по общему ребру.

Возможность существования подобных многогранников доказывается следующей теоремой.

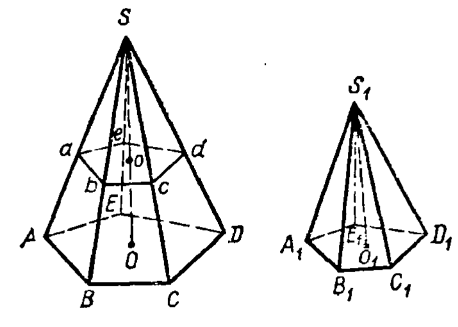


Черт. 406

381. Т е о р е м а. **Если в пирамиде** (черт. 406) **проведем секущую плоскость** ($A_1B_1C_1D_1E_1$) **параллельно основанию, то отсечем от нее другую пирамиду** ($SA_1B_1C_1D_1E_1$), **подобную данной.**

Так как $A_1B_1 \| AB$, $B_1C_1 \| BC$ и т. д. (299), то боковые грани двух пирамид подобны; основания их также подобны (352). Остается доказать равенство многогранных углов. Угол S у обеих пирамид общий; трехгранные углы A_1, B_1, C_1, . . . равны соответственно углам A, B, C, . . . , потому что у каждой пары этих углов имеется по одному и тому же двугранному углу, расположенному между двумя соответственно равными и одинаково

расположенными плоскими углами; так, у углов A и A_1 один и тот же двугранный угол (с ребром AS) лежит между равными плоскими углами: $SA_1E_1 = SAE$ и $SA_1B_1 = SAB$.



Черт. 407

382. Теорема. Поверхности подобных многогранников относятся как квадраты сходственных ребер.

Пусть $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ означают площади отдельных граней одного из подобных многогранников, а $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ — площади сходственных граней другого; положим еще, что L и l будут длины двух каких-нибудь сходственных ребер. Тогда вследствие подобия сходственных граней и пропорциональности всех сходственных ребер будем иметь (258):

$$\frac{P_1}{p_1} = \frac{L^2}{l^2}; \quad \frac{P_2}{p_2} = \frac{L^2}{l^2}; \quad \frac{P_3}{p_3} = \frac{L^2}{l^2}; \quad \ldots; \quad \frac{P_n}{p_n} = \frac{L^2}{l^2};$$

откуда по свойству равных отношений получим:

$$\frac{P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n} = \frac{L^2}{l^2}.$$

383. Теорема. Объемы подобных многогранников относятся как кубы сходственных ребер.

Ограничимся доказательством этой теоремы только для подобных пирамид. Пусть (черт. 407) пирамиды $SABCDE$ и $S_1A_1B_1C_1D_1E_1$ подобны. Вложим вторую пирамиду в первую так, чтобы у них совпали равные многогранные углы S и S_1. Тогда основание $A_1B_1C_1D_1E_1$ займет некоторое положение $abcde$, причем стороны ab, bc, ... будут соответственно параллельны сторонам AB, BC, ... (вследствие равенства плоских углов трехгранных A и A_1, B и B_1 и т. д.); вследствие этого плоскость $abcde$ параллельна $ABCDE$ (298,2). Пусть SO и So — высоты двух пирамид. Тогда

$$\text{об. } SABCDE = (\text{пл. } ABCDE) \cdot \frac{1}{3} SO,$$

$$\text{об. } Sabcde = (\text{пл. } abcde) \cdot \frac{1}{3} So.$$

Следовательно,

$$\frac{\text{об. } SABCDE}{\text{об. } Sabcde} = \frac{\text{пл. } ABCDE}{\text{пл. } abcde} \cdot \frac{SO}{So}.$$

Но

$$\frac{\text{пл. } ABCDE}{\text{пл. } abcde} = \frac{SO^2}{So^2}.$$

Поэтому

$$\frac{\text{об. } SABCDE}{\text{об. } Sabcde} = \frac{SO^3}{So^3} = \frac{SA^3}{Sa^3} = \ldots$$

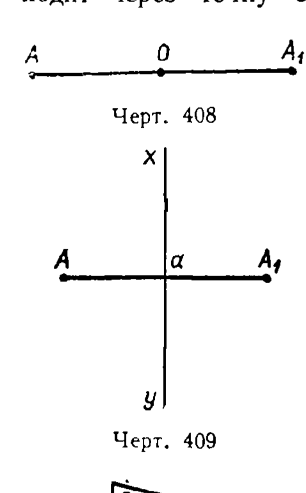
384. Замечание. В стереометрии можно рассматривать фигуры, подобно расположенные, в том же смысле, какой был нами указан в планиметрии (167 и сл.), причем и здесь, как и там, подобие в расположении может быть двоякое: прямое и обратное.

Не входя в подробности этого рассмотрения, заметим только следующее важное различие между подобием в расположении на плоскости и подобием в расположении в пространстве трех измерений. На плоскости многоугольники, подобно расположенные, прямо или обратно, оказываются всегда подобными между собой; в стереометрии же только при прямом подобии в расположении многогранники подобны между собой, при обратном же подобии в расположении многогранники вообще не подобны (примером могут служить симметричные многогранные углы, о которых говорилось в § 320).

VI. СИММЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

385. Определение. Различают три рода симметрии в пространстве: относительно точки, относительно прямой и относительно плоскости.

Две точки A и A_1 (черт. 408) называются симметричными относительно точки O (центра симметрии), если прямая AA_1 проходит через точку O и делится ею пополам. Две точки A и A_1 (черт. 409) называются симметричными относительно прямой xy (оси симметрии) или (черт. 410) относительно плоскости P (плоскости симметрии), если прямая AA_1 перпендикулярна к xy или к плоскости P и делится ими пополам.



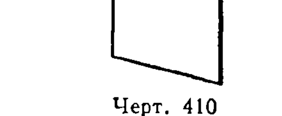
Черт. 408

Черт. 409

Две фигуры называются симметричными относительно центра (черт. 411), оси (черт. 412) или плоскости (черт. 413), если каждой точке одной фигуры соответствует симметричная точка другой. Симметричные точки двух таких фигур называются *сходственными*.

386. Теорема. **Две фигуры, симметричные относительно оси, равны.** В этом убедимся, если повернем одну из фигур (черт. 412) вокруг оси на 180°. Тогда каждая точка A, B, C, S одной фигуры совпадет со сходственной точкой другой фигуры и, следовательно, обе фигуры совместятся.

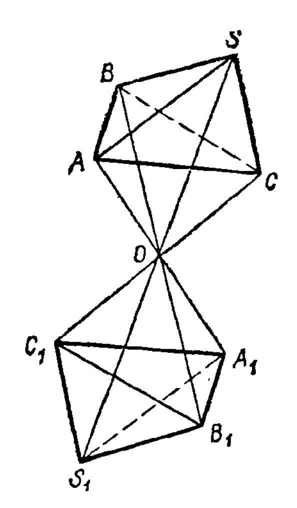
387. Теорема. **Две фигуры, симметричные с одной и той же фигурой относительно различных центров, равны между собой.**



Черт. 410

Доказательство. Пусть фигуры F_1 и F_{11} симметричны с одной фигурой F относительно центров O и O_1 (черт. 414). Возьмем в

фигуре F произвольную точку A и в фигурах F_1 и F_{11} точки A_1 и A_{11}, симметричные с A; затем проведем прямые OO_1 и A_1A_{11}. Так как $AO=A_1O$ и $AO_1=A_{11}O_1$, то $A_1A_{11} \| OO_1$ и $A_1A_{11}=2OO_1$. Таким образом, все соответственные точки фигур F_1 и F_{11} (например, A_1 и A_{11}, B_1 и B_{11}, C_1 и C_{11} и т. д.) лежат на расстояниях, параллельных прямой OO_1 и равных $2OO_1$. Поэтому если переместить фигуру F_1 так, чтобы каждая ее точка описала прямую, параллельную OO_1 и равную удвоенной этой линии, то обе фигуры F_1 и F_{11} совместятся; значит, они равны.

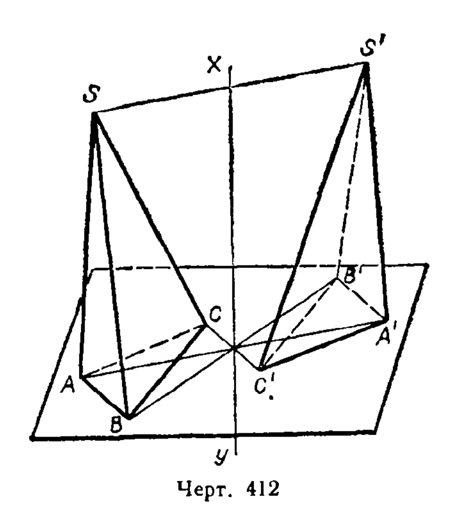


Черт. 411

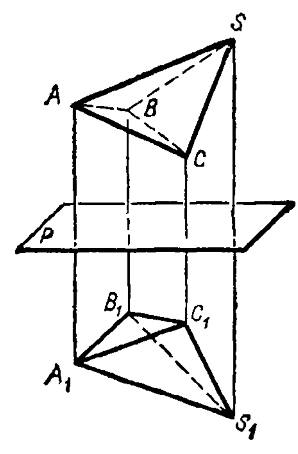
388. Теоремы. **Если две фигуры симметричны относительно плоскости, то их можно поместить так, что они будут симметричны относительно любой точки, взятой на этой плоскости.**

Обратно, **если две фигуры симметричны относительно точки, то их можно поместить так, что они будут симметричны относительно любой плоскости, проходящей через эту точку.**

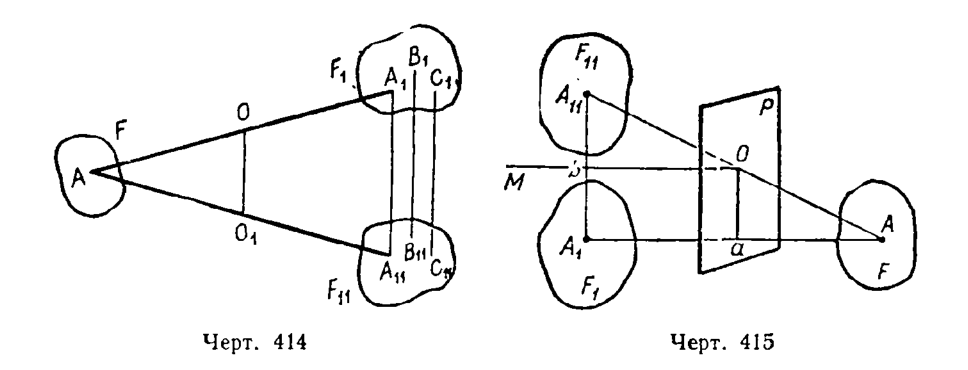
Пусть фигуры F и F_1 (черт. 415) симметричны относительно плоскости P и O — какая-нибудь точка на плоскости P. Докажем, что фигуру F_1 можно поместить в положение F_{11}, при котором она будет симметрична с F относительно точки O. Возьмем какие-нибудь сходственные точки A и A_1 этих фигур и проведем прямые AA_1 и AO. Последнюю прямую продолжим на расстояние $OA_{11}=AO$ и соединим A_{11} с A_1 прямой. В образовавшемся $\triangle A_1A_{11}A$ проведем $Ob \| AA_1$. Так как точки A_1 и A симметричны относительно плоскости P, то $aA=aA_1$ и $aA_1 \perp P$



Черт. 412



Черт. 413



Черт. 414 Черт. 415

и, следовательно, $Ob \perp P$. Так как $A_{11}O=OA$ и $Ob \| AA_1$, то $A_{11}b=bA_1$. Теперь мы видим, что если фигуру F_1 вращением вокруг оси Ob повернем на 180°, то точка A_1 займет положение A_{11} и, следовательно, сделается симметричной с A относительно центра O. Так как все сказанное о точках A и A_1 может быть повторено о всякой другой паре сходственных точек фигур F и F_1, то заключаем, что фигура F_1, симметричная с F относительно плоскости P, после вращения на 180° вокруг оси Ob займет положение F_{11}, симметричное с F относительно центра O.

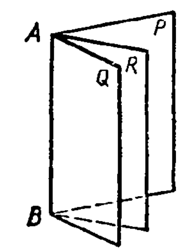
Обратно, пусть фигура F_{11} симметрична с F относительно центра O и пусть P (тот же чертеж) — какая-нибудь плоскость, проходящая через O. Докажем, что фигуру F_{11} можно поместить в такое положение F_1, при котором она будет симметрична с F относительно плоскости. Пусть A и A_{11} будут две сходственные точки фигур F и F_{11} (т. е. пусть $AO=OA_{11}$). Опустим из A на плоскость P перпендикуляр Aa и продолжим его на расстояние $aA_1=Aa$ и в $\triangle AA_1A_{11}$ проведем $Ob \| AA_1$. Рассуждая затем так же, как и в прямой теореме, придем к заключению, что фигуру F_{11} можно, вращая ее на 180° вокруг Ob, привести в положение F_1, симметричное с F относительно плоскости P.

389. С л е д с т в и я. 1. **Фигуры, симметричные с одной и той же фигурой относительно различных плоскостей, равны между собой,** потому что эти фигуры всегда можно сделать симметричными с одной и той же фигурой относительно различных центров, а такие фигуры, как мы видели (387), равны между собой.

2. Если будем обращать внимание только на ф о р м у фигуры, а не на ее положение в пространстве, то можем сказать, что **данная фигура F имеет только единственную симметричную с ней фигуру** (относительно точки или относительно плоскости — все равно), так как все фигуры, симметричные с F, равны между собой. Вследствие этого при исследовании свойств симметричных фигур, зависящих только от их формы, мы можем по произволу рассматривать эти фигуры или как симметричные относительно центра, или как симметричные относительно плоскости.

390. Т е о р е м ы. 1. **Фигура, симметричная с плоской фигурой, есть также плоская фигура, равная первой.**

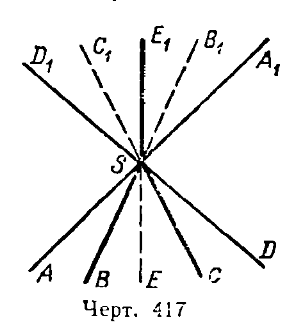
Это свойство сделается очевидным, если возьмем за плоскость симметрии плоскость данной фигуры; тогда симметричная фигура сливается с данной.



Черт. 416

В частности, фигура, симметричная с отрезком прямой, есть равный отрезок прямой; фигура, симметричная с углом, есть равный угол; фигура, симметричная с плоским многоугольником, есть равный плоский многоугольник; фигура, симметричная с кругом, есть равный круг и т. п.

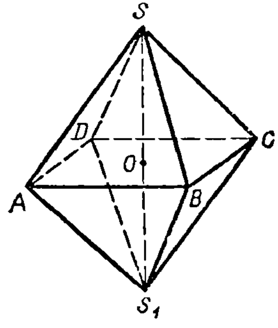
2. **Фигура, симметричная с двугранным углом** ($PABQ$, черт. 416), **есть равный двугранный угол.**



Черт. 417

Это свойство сделается очевидным, если за плоскость симметрии возьмем биссектрисную плоскость R. Тогда фигура, симметричная с гранью P, будет другая грань Q, и наоборот; следовательно, фигура, симметричная с углом $PABQ$, будет угол $QABP$.

3. **Фигура, симметричная с многогранным углом** ($SABCDE$, черт. 417), есть многогранный угол, у которого двугранные и плоские углы соответственно равны двугранным и плоским углам первого многогранного угла, но расположены в обратном порядке.



Черт. 418

Это свойство сделается очевидным, если возьмем за центр симметрии вершину S. Тогда получим два симметричных угла $SABCDE$ и $SA_1B_1C_1D_1E_1$, у которых двугранные и плоские углы соответственно равны, но расположены в обратном порядке.

Следствие. Симметричные многогранные углы вообще не равны, так как вследствие обратного расположения равных двугранных углов они не могут совместиться. По той же причине симметричные многогранники вообще не равны.

4. **Два симметричных многогранника равновелики.**

Докажем сначала эту теорему для симметричных пирамид (черт. 418) $SABCD$ и S_1ABCD, которые мы разместим так, чтобы плоскостью симметрии служило основание $ABCD$. Так как точки S и S_1 симметричны относительно плоскости основания, то высоты SO и S_1O равны; вследствие этого пирамиды, имея общее основание и равные высоты, равновелики.

Два каких угодно симметричных многогранника всегда могут быть разложены на одинаковое число симметричных пирамид; поэтому теорема верна и для многогранников произвольной формы.

VII. ПОНЯТИЕ О ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОГРАННИКАХ

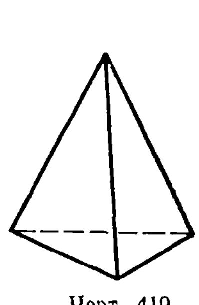
391. Определение. Многогранник называется *правильным*, если все его грани суть равные правильные многоугольники и все многогранные углы равны (таков, например, куб). Из этого определения следует, что в правильных многогранниках равны все плоские углы, все двугранные углы и все ребра.

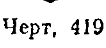
392. Перечисление правильных многогранников. Примем во внимание, что в многогранном угле наименьшее число граней три и что сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше $4d$ (318). Каждый угол правильного треугольника равен $\frac{2}{3}d$. Если повторим $\frac{2}{3}d$ слагаемым 3 раза, 4 раза и 5 раз, то получим суммы, меньшие $4d$, а если повторим $\frac{2}{3}d$ слагаемым 6 раз или более, то получим в сумме $4d$ или более. Поэтому из плоских углов, равных углам правильного треугольника, можно образовать выпуклые многогранные углы только трех видов: трехгранные, четырехгранные и пятигранные. Угол квадрата равен d, а угол правильного пятиугольника равен $\frac{6}{5}d$; повторяя эти углы слагаемым 3 раза, получаем суммы, меньшие $4d$, а повторяя их 4 раза или более, получаем $4d$ или более. Поэтому из плоских углов, равных углам квадрата или правильного пятиугольника, можно образовать только трехгранные углы. Угол правильного шестиугольника равен $\frac{4}{3}d$; поэтому из таких углов нельзя образовать даже трехгранного угла. Из углов правильных многоугольников, имеющих более шести сторон, подавно нельзя образовать никакого многогранного угла.

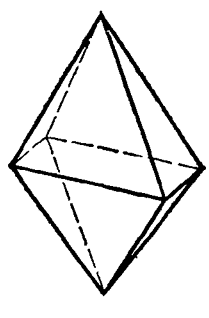
Отсюда следует, что выпуклых правильных многогранников не может быть более следующих пяти:

1. Правильный четырехгранник, или т е т р а э д р, поверхность которого составлена из четырех правильных треугольников (черт. 419).

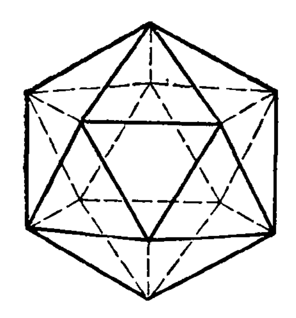
2. Правильный восьмигранник, или о к т а э д р, поверхность которого составлена из восьми правильных треугольников (черт. 420).



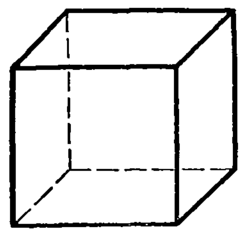

Черт, 419

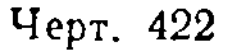


Черт. 420

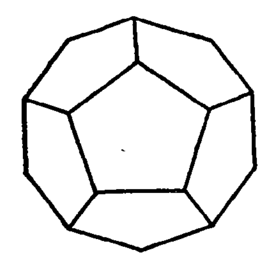


Черт. 421





Черт. 422



Черт. 423

3. Правильный двадцатигранник, или и к о с а э д р, образованный двадцатью правильными треугольниками (черт. 421).

4. Правильный шестигранник, или э к с а э д р, образованный шестью квадратами (черт. 422). Он называется иначе к у б о м.

5. Правильный двенадцатигранник, или д о д е к а э д р, образованный двенадцатью правильными пятиугольниками (черт. 423).

УПРАЖНЕНИЯ

434. Ребро данного куба a. Найти ребро другого куба, объем которого вдвое больше объема данного куба.

З а м е ч а н и е. Эта з а д а ч а о б у д в о е н и и к у б а, известная с древних времен, легко решается вычислением (именно $x=\sqrt[3]{2a^3}=a\sqrt[3]{2}=a\cdot 1{,}25992\ldots$), но построением (с помощью циркуля и линейки) она решена быть не может, так как формула для неизвестного содержит радикал 3-й степени (см. конец § 206).

435. Вычислить поверхность и объем прямой призмы, у которой основание — правильный треугольник, вписанный в круг радиуса $r=2$ м, а высота равна стороне правильного 6-угольника, описанного около того же круга.

436. Определить поверхность и объем правильной 8-угольной призмы, у которой высота $h=6$ м, а сторона основания $a=8$ см.

437. Определить боковую поверхность и объем правильной 6-угольной пирамиды, у которой высота равна 1 м, а апофема составляет с высотой угол в 30°.

438. Вычислить объем треугольной пирамиды, у которой каждое боковое ребро равно l, а стороны основания суть a, b и c.

439. Дан трехгранный угол $SABC$, у которого все три плоских угла прямые. На его ребрах отложены длины $SA=a$, $SB=b$ и $SC=c$. Через точки A, B и C проведена плоскость. Определить объем пирамиды $SABC$.

440. Высота пирамиды равна h, а основание — правильный 6-угольник со стороной a. На каком расстоянии x от вершины пирамиды следует провести плоскость, параллельную основанию, чтобы объем образовавшейся усеченной пирамиды равнялся V?

441. Определить объем правильного тетраэдра с ребром a.

442. Определить объем правильного октаэдра с ребром a.

443. Усеченная пирамида, объем которой $V=1465$ куб. см, имеет основаниями правильные 6-угольники со сторонами $a=23$ см и $b=17$ см. Вычислить высоту этой пирамиды.

444. Объем V усеченной пирамиды равен 10,5 куб. м, высота $h=\sqrt{3}$ м и сторона a правильного 6-угольника, служащего нижним основанием, равна 2 м. Вычислить сторону правильного 6-угольника, служащего верхним основанием.

445. На каком расстоянии от вершины S пирамиды $SABC$ надо провести плоскость, параллельную основанию, чтобы отношение объемов частей, на которые рассекается этой плоскостью пирамида, равнялось m?

446. Пирамида с высотой h разделена плоскостями, параллельными основанию, на три части в отношении $m:n:p$. Определить расстояние этих плоскостей до вершины пирамиды.

447. Сумма объемов двух подобных многогранников равна V, а отношение сходственных ребер равно $m:n$. Определить объемы их.

448. Разделить объем усеченной пирамиды плоскостью, параллельной основаниям B и b, на две части в отношении $m:n$.

З а м е ч а н и е. См. также задачи прикладного характера, с. 263.

ОТДЕЛ ЧЕТВЕРТЫЙ

КРУГЛЫЕ ТЕЛА

I. ЦИЛИНДР И КОНУС

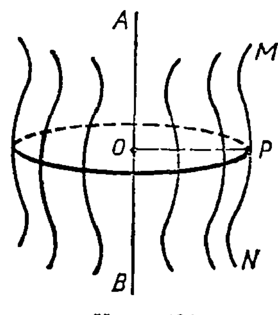
393. Поверхность вращения. Так называется поверхность, которая получается от вращения какой-нибудь неизменяющейся линии (MN, черт. 424), называемой *образующей*, вокруг неподвижной прямой (AB), называемой *осью*; при этом предполагается, что образующая (MN) при своем вращении неизменно связана с осью (AB).

Возьмем на образующей какую-нибудь точку P и опустим из нее на ось перпендикуляр PO. Очевидно, что при вращении не изменяется ни длина этого перпендикуляра, ни величина угла AOP, ни положение точки O. Поэтому каждая точка образующей описывает окружность, плоскость которой перпендикулярна к оси AB и центр лежит на пересечении этой плоскости с осью. Отсюда следует:

плоскость, перпендикулярная к оси, пересекаясь с поверхностью вращения, дает в сечении окружность.

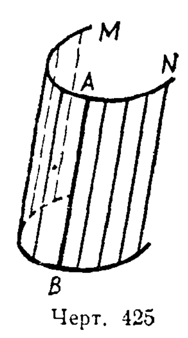
Всякая секущая плоскость, проходящая через ось, называется *меридиональной* плоскостью, а пересечение ее с поверхностью вращения — *меридианом*. Все меридианы равны между собой, потому что при вращении каждый из них проходит через то положение, в котором ранее был всякий другой меридиан.

394. Цилиндрическая поверхность. Так называется поверхность, производимая движением прямой (AB, черт. 425), перемещающейся в пространстве параллельно данному направлению и пересекающей при этом данную линию (MN). Прямая AB называется *образующей*, а линия MN — *направляющей*.

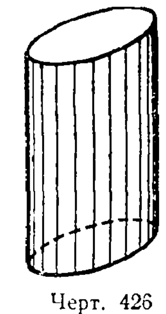


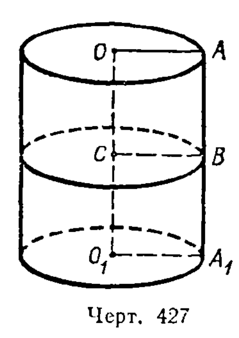
Черт. 424

395. Цилиндр. Так называется тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя параллельными плоскостями (черт. 426). Часть цилиндрической поверхности, заключенная между плоскостями, называется *боковой поверхностью*, а части плоскостей, отсекаемые этой поверхностью,— *основаниями* цилиндра. Расстояние между основаниями есть *высота* цилиндра. Цилиндр называется *прямым* или *наклонным*, смотря по тому, перпендикулярны или наклонны к основаниям его образующие.



Черт. 425


Черт. 426



Черт. 427

Прямой цилиндр (черт. 427) называется *круговым*, если его основания — круги. Такой цилиндр можно рассматривать как тело, происходящее от вращения прямоугольника OAA_1O_1 вокруг стороны OO_1, как оси; при этом сторона AA_1 описывает боковую поверхность, а стороны OA и O_1A_1 — круги оснований. Всякая прямая BC, параллельная OA, описывает также круг, перпендикулярный к оси. Отсюда следует:

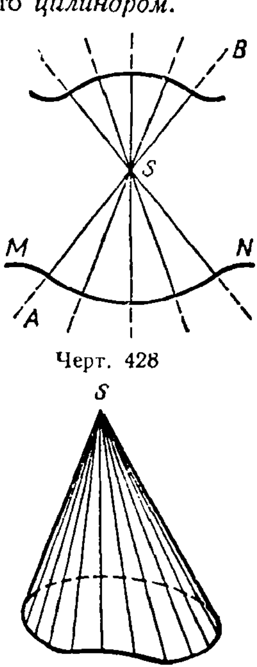
сечение прямого кругового цилиндра плоскостью, параллельной основаниям, есть круг.

В элементарной геометрии рассматривается только прямой круговой цилиндр; для краткости его называют просто *цилиндром*.

Иногда приходится рассматривать такие призмы, основания которых суть многоугольники, вписанные в основания цилиндра или описанные около них; такие призмы называются *вписанными* в цилиндр или *описанными* около него.

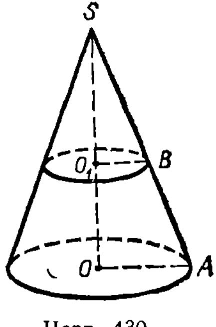
396. Коническая поверхность. Так называется поверхность, производимая движением прямой (AB, черт. 428), перемещающейся в пространстве так, что она при этом постоянно проходит через неподвижную точку (S) и пересекает данную линию (MN). Прямая AB называется *образующей*, линия MN — *направляющей*, а S — *вершиной* конической поверхности.

397. Конус. Так называется тело, ограниченное конической поверхностью и плоскостью, пересекающей все образующие по одну сторону от вершины (черт. 429). Часть конической поверхности, ограниченная этой плоскостью, называется *боковой поверхностью*, а часть плоскости, отсекаемая боковой поверхностью,— *основанием* конуса. Перпендикуляр, опущенный из вершины на основание, есть *высота* конуса.



Черт. 428

Черт. 429

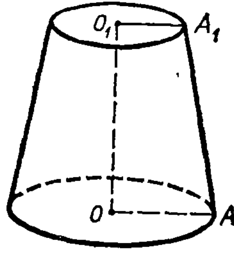


Черт. 430

Конус называется *прямым круговым*, если его основание есть круг, а высота проходит через центр основания (черт. 430). Такой конус можно рассматривать как тело, происходящее от вращения прямоугольного $\triangle SOA$ вокруг катета SO, как оси. При этом гипотенуза SA производит боковую поверхность, а катет OA — основание конуса. Всякая прямая BO_1, параллельная OA, описывает при вращении круг, перпендикулярный к оси. Отсюда следует:

сечение прямого кругового конуса плоскостью, параллельной основанию, есть круг [1].

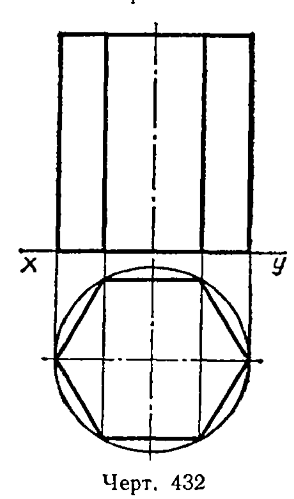
В элементарной геометрии рассматривается только прямой круговой конус, который для краткости называется просто *конусом*.



Черт. 431

Иногда приходится рассматривать такие пирамиды, основания которых суть многоугольники, вписанные в основание конуса или описанные около него, а вершина совпадает с вершиной конуса. Такие пирамиды называются *вписанными* в конус или *описанными* около него.

398. Усеченный конус. Так называется часть полного конуса, заключенная между основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию. Параллельные круги, ограничивающие усеченный конус, называются *основаниями* его. Усеченный конус (черт. 431) можно рассматривать как тело, происходящее от вращения прямоугольной трапеции OAA_1O_1 вокруг стороны OO_1, перпендикулярной к основаниям трапеции.

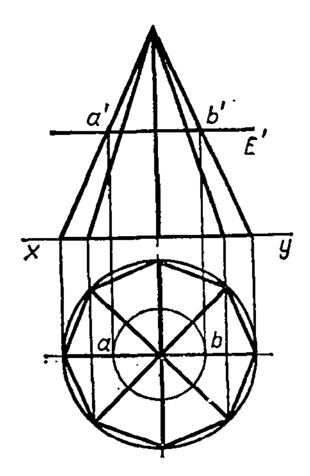


Черт. 432

399. Проекции цилиндра и конуса. Ограничимся указанием проекций цилиндра и конуса, поставленных основанием на горизонтальную плоскость проекций. Горизонтальная проекция обоих оснований цилиндра (черт. 432) будет, очевидно, один и тот же круг, а вертикальная проекция — прямоугольник, у которого основание, лежащее на оси xy, равно диаметру оснований цилиндра, а высота равна высоте цилиндра. На эпюре изображены еще проекции правильной шестиугольной призмы, вписанной в цилиндр; основание этой призмы расположено так, что две противоположные стороны его параллельны оси xy.

[1] Сечения, образуемые другими плоскостями, рассмотрены ниже, § 441 и след.

Черт. 433 представляет собой проекции конуса и правильной восьмиугольной пирамиды, вписанной в этот конус. Конус пересечен плоскостью, параллельной основанию и имеющей вертикальный след E'. В сечении получается круг, диаметр которого ab получится, если из точек a' и b' опустим на ось xy перпендикуляры и продолжим их до пересечения с горизонтальными проекциями соответствующих ребер. Откинув верхушку, получим проекции усеченного конуса.



Черт. 433

Замечание. Если бы нужно было найти проекции и истинную форму сечения цилиндра (или конуса) какой-нибудь плоскостью (например, перпендикулярной к вертикальной плоскости проекций), то надо в цилиндр (в конус) вписать какую-нибудь правильную призму (пирамиду) и найти проекции и истинную форму пересечения данной плоскостью этой призмы (пирамиды) так, как было ранее указано (358, 359). Обведя (от руки или с помощью лекала) кривой линией вершины многоугольника, полученного в сечении, мы найдем приблизительные проекции и истинную форму сечения цилиндра (конуса). Чертеж будет тем точнее, чем больше граней мы возьмем во вписанной призме (пирамиде).

Поверхность цилиндра и конуса

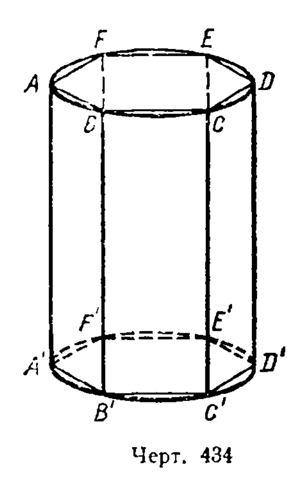
400. Определения. Боковые поверхности цилиндра и конуса принадлежат к поверхностям кривым, т. е. к таким, никакая часть которых не может совместиться с плоскостью. Поэтому мы должны особо определить, что надо разуметь под величиной боковой поверхности цилиндра или конуса, когда сравнивают эти поверхности с плоской единицей площади. Мы будем держаться следующих определений:

1. **За величину боковой поверхности цилиндра принимают предел, к которому стремится боковая поверхность вписанной в этот цилиндр правильной призмы, когда число ее боковых граней неограниченно удваивается.**

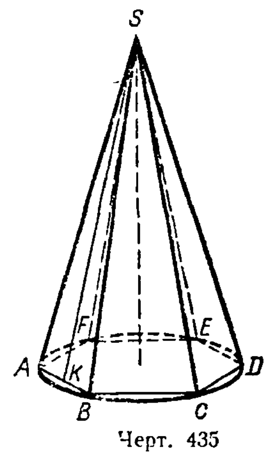
2. **За величину боковой поверхности конуса** (полного или усеченного) **принимается предел, к которому стремится боковая поверхность вписанной в этот конус правильной пирамиды** (полной или усеченной), **когда число ее боковых граней неограниченно удваивается.**

401. Теорема. **Боковая поверхность цилиндра равна произведению окружности основания на высоту.**

Впишем в цилиндр (черт. 434) какую-нибудь правильную призму. Обозначим буквами p и H числа, выражающие в соответствующих единицах периметр основания и высоту этой призмы. Тогда боковая поверхность ее выразится произведением pH. Предположим теперь, что число боковых граней призмы (следовательно, и число сторон мно-



Черт. 434



Черт. 435

гоугольника, служащего основанием этой призмы) неограниченно удваивается. Тогда периметр p будет стремиться к пределу, принимаемому за длину C окружности основания, а высота H останется без изменения; следовательно, боковая поверхность призмы, равная всегда произведению pH, будет стремиться к пределу CH. Этот предел и принимается за величину боковой поверхности цилиндра. Обозначив ее буквой S, можем написать:

$$S = CH.$$

402. Следствия. 1. Если R обозначает радиус основания цилиндра, то $C = 2\pi R$; поэтому боковая поверхность цилиндра выразится:

$$S = 2\pi RH.$$

2. Чтобы получить полную поверхность цилиндра, достаточно приложить к боковой поверхности сумму площадей двух оснований; поэтому, обозначая полную поверхность через T, будем иметь:

$$T = 2\pi RH + \pi R^2 + \pi R^2 = 2\pi R(H + R).$$

403. Теорема. **Боковая поверхность конуса равна произведению окружности основания на половину образующей.**

Впишем в конус (черт. 435) какую-нибудь правильную пирамиду и обозначим буквами p и l числа, выражающие в соответствующих единицах периметр основания и апофему этой пирамиды. Тогда боковая поверхность ее выразится произведением $\frac{1}{2}pl$. Предположим теперь, что число боковых граней пирамиды (следовательно, и число сторон многоугольника, служащего основанием этой пирамиды) неограниченно удваивается. Тогда периметр p будет стремиться к пределу, принимаемому за длину C окружности основания, а апофема l будет иметь пределом образующую конуса (так как из $\triangle SAK$ следует, что $SA - SK < AK$); значит, если образующую конуса обозначим буквой L, то боковая поверхность вписанной пирамиды, постоянно равная $\frac{1}{2}pl$, будет стремиться к пределу $\frac{1}{2}CL$. Этот предел и принимается за величину боковой поверхности конуса. Обозначив ее буквой S, можем написать:

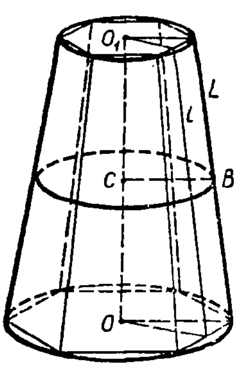
$$S = \frac{1}{2}CL = C \cdot \frac{1}{2}L.$$

404. Следствия. 1. Так как $C=2\pi R$, то боковая поверхность конуса выразится:

$$S=\frac{1}{2}\cdot 2\pi RL=\pi RL.$$

2. Полную поверхность конуса получим, если к боковой поверхности приложим площадь основания; поэтому

$$T=\pi RL+\pi R^2=\pi R(L+R).$$



Черт. 436

405. Теорема. **Боковая поверхность усеченного конуса равна произведению полусуммы окружностей оснований на образующую.**

Впишем в усеченный конус (черт. 436) какую-нибудь правильную усеченную пирамиду и обозначим буквами p, p_1 и l числа, выражающие в одинаковых линейных единицах периметр нижнего, периметр верхнего основания и апофему этой пирамиды. Тогда боковая поверхность вписанной пирамиды равна

$$\frac{1}{2}(p+p_1)l.$$

При неограниченном удвоении числа боковых граней вписанной пирамиды периметры p и p_1 стремятся к пределам, принимаемым за длины C и C_1 окружностей оснований, а апофема l имеет пределом образующую L усеченного конуса. Следовательно, величина боковой поверхности вписанной пирамиды стремится при этом к пределу, равному $\frac{1}{2}(C+C_1)L$. Этот предел и принимается за величину боковой поверхности усеченного конуса. Обозначив ее буквой S, будем иметь:

$$S=\frac{1}{2}(C+C_1)L.$$

406. Следствия. 1. Если R и R_1 означают радиусы окружностей нижнего и верхнего оснований, то боковая поверхность усечен. конуса

$$S=\frac{1}{2}(2\pi R+2\pi R_1)L=\pi(R+R_1)L.$$

2. Если проведем в трапеции (черт. 436), от вращения которой получается усеченный конус, среднюю линию BC, то получим:

$$BC=\frac{1}{2}(R+R_1),$$

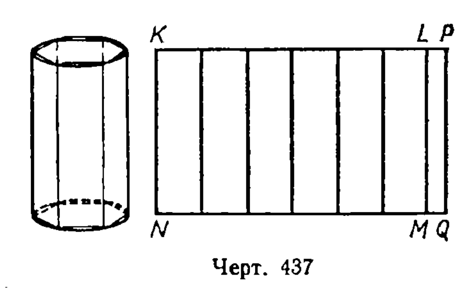
откуда

$$R+R_1=2BC.$$

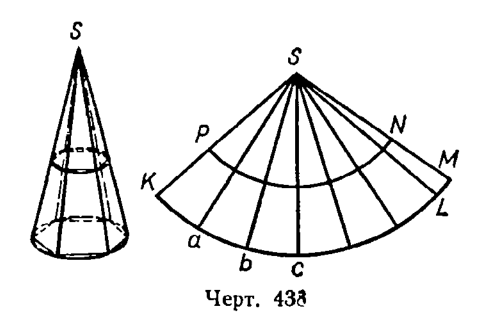
Следовательно,

$$S=2\pi BC\cdot L,$$

т. е. **боковая поверхность усеченного конуса равна произведению окружности среднего сечения на образующую.**



Черт. 437



Черт. 438

3. Полная поверхность T усеченного конуса выразится так:

$$T=\pi(R^2+R_1^2+RL+R_1L).$$

407. Развертка цилиндра и конуса. Впишем в цилиндр (черт. 437) какую-нибудь правильную призму и затем вообразим, что боковая ее поверхность разрезана вдоль бокового ребра. Очевидно, что, вращая ее грани вокруг ребер, мы можем р а з в е р н у т ь эту поверхность в плоскую фигуру без разрыва и без складок. Тогда получится то, что называется *разверткой* боковой поверхности призмы. Она представляет собой прямоугольник $KLMN$, составленный из стольких отдельных прямоугольников, сколько в призме боковых граней. Основание его MN равно периметру основания призмы, а высота KN есть высота призмы.

Вообразим теперь, что боковые грани вписанной призмы неограниченно уменьшаются; тогда ее развертка будет все удлиняться, приближаясь к предельному прямоугольнику $KPQN$, у которого основание равно окружности основания цилиндра, а высота есть высота цилиндра. Этот прямоугольник называется *разверткой* боковой поверхности цилиндра.

Подобно этому вообразим, что в конус вписана какая-нибудь правильная пирамида (черт. 438). Мы можем разрезать ее боковую поверхность по одному из ребер и затем, повертывая грани вокруг ребер, получить ее плоскую развертку в виде многоугольного сектора SKL, составленного из стольких равнобедренных треугольников, сколько в пирамиде боковых граней. Прямые SK, Sa, Sb, . . . равны боковому ребру пирамиды (или образующей конуса), а длина ломаной $Kab. . .L$ равна периметру основания пирамиды. При неограниченном уменьшении боковых граней вписанной пирамиды развертка ее увеличивается, приближаясь к предельному сектору SKM, у которого дуга KM равна окружности основания, а радиус SK — образующей конуса. Этот сектор называется *разверткой* боковой поверхности конуса.

Подобно этому можно получить развертку боковой поверхности усеченного конуса (черт. 438) в виде части кругового кольца $KMNP$.

Легко видеть, что боковая поверхность цилиндра или конуса равна площади соответствующей развертки.

Объемы цилиндра и конуса

408. Определения. **1. За величину объема цилиндра принимается предел, к которому стремится объем правильной призмы, вписанной в цилиндр, когда число боковых граней этой призмы неограниченно увеличивается.**

2. За величину объема конуса (полного или усеченного) **принимается предел, к которому стремится объем правильной пирамиды** (полной или усеченной), **когда число боковых граней пирамиды неограниченно увеличивается.**

409. Теоремы. **1. Объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту.**

2. Объем конуса равен произведению площади основания на треть высоты.

Впишем в цилиндр какую-нибудь правильную призму, а в конус какую-нибудь правильную пирамиду; тогда, обозначив площадь основания призмы или пирамиды буквой B_1, высоту их буквой H и объем V_1, получим:

$$\text{для призмы } V_1 = B_1H; \text{ для пирамиды } V_1 = \frac{1}{3}B_1H.$$

Вообразим теперь, что число боковых граней призмы и пирамиды неограниченно увеличивается. Тогда B_1 будет иметь пределом площадь B основания цилиндра или конуса, а высота H остается без изменения; значит, произведения B_1H и $\frac{1}{3}B_1H$ будут стремиться к пределам BH и $\frac{1}{3}BH$ и потому объем V цилиндра или конуса будет:

$$\text{для цилиндра } V = BH; \text{ для конуса } V = \frac{1}{3}BH.$$

410. Следствие. Если радиус основания цилиндра или конуса обозначим через R, то $B = \pi R^2$; поэтому

$$\text{об. цил. } V = \pi R^2 H; \quad \text{об. кон. } V = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

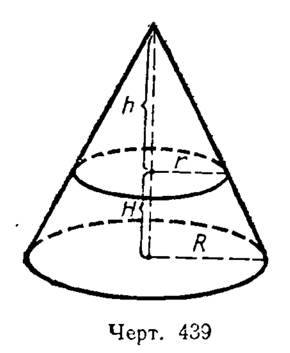
411. Теорема. **Объем усеченного конуса равен сумме объемов трех конусов, имеющих одинаковую высоту с усеченным конусом, а основаниями: один — нижнее основание этого конуса, другой — верхнее, третий — среднее пропорциональное между ними.**

Теорему эту докажем так же, как раньше мы доказали теорему для объема усеченной пирамиды (378).

На верхнем основании усеченного конуса (черт. 439) поместим такой малый конус (с высотой h), чтобы усеченный конус превратился в полный. Тогда объем V усеченного конуса можно рассматривать как разность объемов полного конуса и дополнительного.

Поэтому

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2(H+h) - \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left[R^2H + (R^2 - r^2)h\right].$$



Черт. 439

Из подобия треугольников находим:

$$\frac{R}{r}=\frac{H+h}{h};$$

откуда получаем:

$$Rh=rH+rh;\quad (R-r)h=rH;\quad h=\frac{rH}{R-r}.$$

Поэтому

$$V=\frac{1}{3}\pi[R^2H+(R+r)rH]=$$

$$=\frac{1}{3}\pi H(R^2+Rr+r^2)=$$

$$=\frac{1}{3}\pi R^2H+\frac{1}{3}\pi RrH+\frac{1}{3}\pi r^2H.$$

Так как πR^2 выражает площадь нижнего основания, πr^2 — площадь верхнего основания и $\pi Rr=\sqrt{\pi R^2\cdot\pi r^2}$ — средняя пропорциональная величина между тем и другим основанием, то полученная нами формула вполне подтверждает теорему.

412. **Замечание.** Поверхности и объемы цилиндров и конусов можно определить (аналогично определению длины окружности, § 267 и след.) иначе, чем это сделано в предыдущих параграфах, без помощи понятий о пределе, а именно так: **за численную величину боковой поверхности цилиндра** (конуса) **принимается такое число, которое больше всех чисел, измеряющих боковые поверхности правильных вписанных призм** (пирамид) **но меньше всех чисел, измеряющих боковые поверхности описанных правильных призм** (пирамид).

Легко показать, что такое число есть CH для цилиндра и $\frac{1}{2}CL$ для конуса.

Для показания того, что такое число единственное, надо предварительно доказать лемму, что разность между боковой поверхностью правильной описанной около цилиндра призмы (пирамиды около конуса) и поверхностью правильной вписанной призмы (пирамиды) стремится к нулю, когда число сторон призм (пирамид) неограниченно увеличивается.

Подобный же вывод можно дать и для объема цилиндра и конуса.

Подобные цилиндры и конусы

413. Определение. Два цилиндра или конуса называются *подобными*, если они произошли от вращения подобных прямоугольников или треугольников вокруг сходственных сторон.

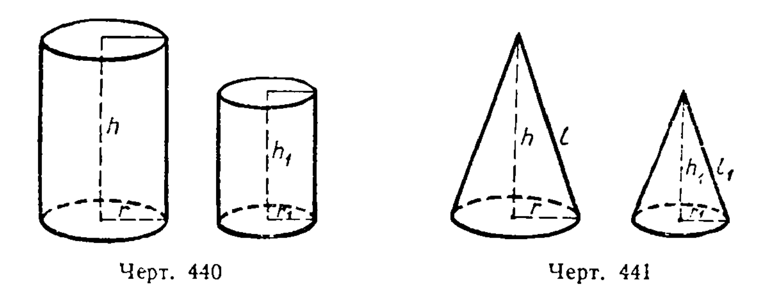
Пусть (черт. 440 и 441) h и h_1 будут высоты двух подобных цилиндров или конусов, r и r_1 — радиусы их оснований, l и l_1 — образующие; тогда согласно определению

$$\frac{r}{r_1}=\frac{h}{h_1}\quad\text{и}\quad\frac{r}{r_1}=\frac{l}{l_1}.$$

Откуда (по свойству равных отношений) находим:

$$\frac{r+h}{r_1+h_1}=\frac{r}{r_1}\quad\text{и}\quad\frac{r+l}{r_1+l_1}=\frac{r}{r_1}.$$

Заметив эти пропорции, докажем следующую теорему.



Черт. 440 Черт. 441

414. Т е о р е м а. **Боковые и полные поверхности подобных цилиндров или конусов относятся как квадраты радиусов или высот, а объемы — как кубы радиусов или высот.**

Пусть S, T и V будут соответственно боковая поверхность, полная поверхность и объем одного цилиндра или конуса; S_1, T_1, V_1 — те же величины для другого цилиндра или конуса, подобного первому. Тогда будем иметь:

для цилиндров:

$$\frac{S}{S_1}=\frac{2\pi rh}{2\pi r_1h_1}=\frac{rh}{r_1h}=\frac{r}{r_1}\cdot\frac{h}{h_1}=\frac{r^2}{r_1^2}=\frac{h^2}{h_1^2};$$

$$\frac{T}{T_1}=\frac{2\pi r(r+h)}{2\pi r_1(r_1+h_1)}=\frac{r}{r_1}\cdot\frac{r+h}{r_1+h_1}=\frac{r^2}{r_1^2}=\frac{h^2}{h_1^2};$$

$$\frac{V}{V_1}=\frac{\pi r^2h}{\pi r_1^2h_1}=\frac{r^2}{r_1^2}\cdot\frac{h}{h_1}=\frac{r^3}{r_1^3}=\frac{h^3}{h_1^3};$$

для конусов:

$$\frac{S}{S_1}=\frac{\pi rl}{\pi r_1l_1}=\frac{r}{r_1}\cdot\frac{l}{l_1}=\frac{r^2}{r_1^2}=\frac{h^2}{h_1^2};$$

$$\frac{T}{T_1}=\frac{\pi r(r+l)}{\pi r_1(r_1+l_1)}=\frac{r}{r_1}\cdot\frac{r+l}{r_1+l_1}=\frac{r^2}{r_1^2}=\frac{h^2}{h_1^2};$$

$$\frac{V}{V_1}=\frac{\frac{1}{3}\pi r^2h}{\frac{1}{3}\pi r_1^2h_1}=\frac{r^2}{r_1^2}\cdot\frac{h}{h_1}=\frac{r^3}{r_1^3}=\frac{h^3}{h_1^3}.$$

I. ШАР

Сечение шара плоскостью

415. Определение. Тело, происходящее от вращения полукруга вокруг диаметра, ограничивающего его, называется *шаром*, а поверхность, образуемая при этом полуокружностью, называется *шаровой* или *сферической* поверхностью. Можно также сказать, что эта поверхность есть геометрическое место точек, одинаково удаленных от одной и той же точки (называемой центром шара).

Прямая, соединяющая центр с какою-нибудь точкой поверхности, называется *радиусом*, а прямая, соединяющая две точки поверхности

прямоугольный $\triangle MOK$, из которого находим:

$$MK=\sqrt{OM^2-OK^2}. \qquad (1)$$

Так как длины OM и OK не изменяются при изменении положения точки M на линии пересечения, то расстояние MK есть величина постоянная для данного сечения; значит, линия пересечения есть окружность, центр которой есть точка K.

Следствие. Пусть R, r и d будут числа, выражающие радиус шара, радиус круга сечения и расстояние секущей плоскости от центра; тогда равенство (1) примет вид:

$$r=\sqrt{R^2-d^2}.$$

Из этой формулы выводим:

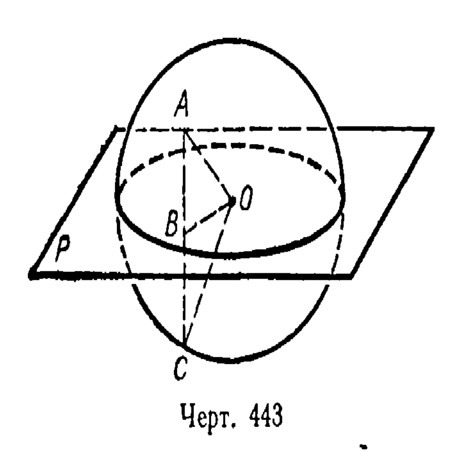
1. Наибольший радиус сечения получается при $d=0$, т. е. когда секущая плоскость проходит через центр шара. В этом случае $r=R$. Круг, получаемый в этом случае, называется *большим кругом*.

2. Наименьший радиус сечения получается при $d=R$. В этом случае $r=0$, т. е. круг сечения обращается в точку.

3. Сечения, равноотстоящие от центра шара, равны.

4. Из двух сечений, не одинаково удаленных от центра шара, то больше, которое ближе к центру.

Свойства больших кругов



Черт. 443

417. Теорема. **Всякая плоскость (P, черт. 443), проходящая через центр шара, делит его поверхность на две симметричные и равные части.**

Возьмем на поверхности шара какую-нибудь точку A, опустим из нее $AB \perp P$ и продолжим AB до пересечения с поверхностью шара

щие на концах одного диаметра, можно провести окружность большого круга и только одну.

Пусть на шаровой поверхности (черт. 444), имеющей центр O, взяты какие-нибудь две точки, например C и N, не лежащие на одной прямой с точкой O. Тогда через точки C, O и N можно провести плоскость. Эта плоскость, проходя через центр O, даст в пересечении с шаровой поверхностью окружность большого круга.

Другой окружности большого круга через те же две точки C и N провести нельзя. Действительно, всякая окружность большого круга должна по определению лежать в плоскости, проходящей через центр шара; следовательно, если бы через C и N можно было провести еще другую окружность большого круга, то тогда выходило бы, что через три точки C, N и O, не лежащие на одной прямой, можно провести две различные плоскости, что невозможно.

419. Теорема. **Окружности двух больших кругов пересекаются пополам.** Центр O (черт. 444), находясь на плоскостях обоих больших кругов, лежит на прямой, по которой эти круги пересекаются; значит, эта прямая есть диаметр того и другого круга, а диаметр делит окружность пополам.

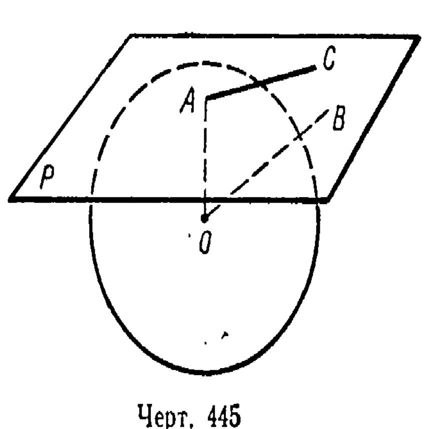
Плоскость, касательная к шару

420. Определение. Плоскость, имеющая с шаровой поверхностью только одну общую точку, называется *касательной плоскостью.*

Возможность существования такой плоскости доказывается следующей теоремой.

421. Теорема. **Плоскость** (P, черт. 445), **перпендикулярная к радиусу** (OA) **в конце его, лежащем на поверхности шара, есть касательная.**

Возьмем на плоскости P произвольную точку B и проведем прямую OB. Так как OB — наклон-



Черт. 445

ная, а OA — перпендикуляр к P, то $OB>OA$. Поэтому точка B лежит вне шаровой поверхности; следовательно, у плоскости P есть только одна общая точка A с шаровой поверхностью; значит, эта плоскость касательная.

422. Обратная теорема. **Касательная плоскость (P, черт. 445) перпендикулярна к радиусу (OA), проведенному в точку касания.** Так как по определению точка A есть единственная общая у плоскости с шаровой поверхностью, то всякая другая точка плоскости лежит вне шаровой поверхности и, следовательно, отстоит от центра более чем A; таким образом, прямая OA есть кратчайшее расстояние точки O от плоскости P, т. е. OA есть перпендикуляр к P.

423. Замечание. Всякая прямая AC (черт. 445), лежащая в плоскости P, касательной к шару, и проходящая через конец A радиуса, есть касательная к шару в точке A, так как она имеет только одну точку A, общую с шаровой поверхностью.

Поверхность шара и его частей

424. Определения. 1. Часть шаровой поверхности (черт. 446), отсекаемая от нее какой-нибудь плоскостью (AA_1), называется *сегментной поверхностью.*

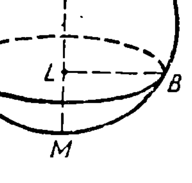
Окружность AA_1 называется *основанием*, а отрезок KM радиуса, перпендикулярного к плоскости сечения,— *высотой* сегментной поверхности.

2. Часть шаровой поверхности, заключенная между двумя параллельными секущими плоскостями (AA_1 и BB_1, черт. 446), называется *шаровым поясом* или *зоной.*

Окружности сечений AA_1 и BB_1 называются основаниями, а расстояние KL между параллельными плоскостями — высотой пояса.

Шаровой пояс и сегментную поверхность можно рассматривать как поверхности вращения: в то время как полуокружность $MABN$, вращаясь вокруг диаметра MN, описывает шаровую поверхность, часть ее AB описывает пояс, а часть MA — сегментную поверхность.

Для нахождения величины шаровой поверхности и ее частей мы докажем следующую вспомогательную истину.



Черт. 446

425. Лемма. **Боковая поверхность каждого из трех тел: конуса, усеченного конуса и цилиндра — равна произведению высоты тела на длину окружности, у которой радиус есть перпендикуляр, восставленный к образующей из ее середины до пересечения с осью.**

1. Пусть конус образуется (черт. 447) вращением $\triangle ABC$ вокруг катета AC. Если D есть середина образующей AB, то (**403**)

$$\text{бок. пов. конуса} = 2\pi BC \cdot AD. \quad (1)$$

Проведя $DE \perp AB$, получим два подобных треугольника ABC и ADE (они прямоугольные и имеют общий угол A); из их подобия выводим:

$$BC : ED = AC : AD,$$

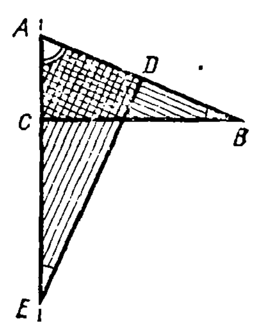
откуда

$$BC \cdot AD = ED \cdot AC,$$

и равенство (1) дает:

$$\text{бок. пов. конуса} = 2\pi ED \cdot AC,$$

что и требовалось доказать.



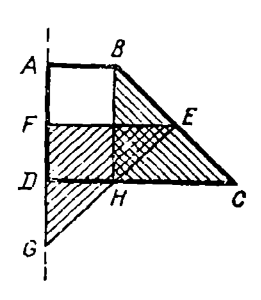
Черт. 447

2. Пусть усеченный конус (черт. 448) производится вращением трапеции $ABCD$ вокруг стороны AD. Проведя среднюю линию EF, будем иметь (406, 2):

$$\text{бок. пов. ус. конуса} = 2\pi EF \cdot BC. \qquad (2)$$

Проведем $EG \perp BC$ и $BH \perp CD$, тогда получим два подобных треугольника EFG и BCH (стороны одного перпендикулярны к сторонам другого); из их подобия выводим:

$$EF : BH = EG : BC,$$



Черт. 448

откуда

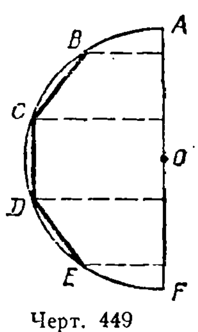
$$EF \cdot BC = BH \cdot EG = AD \cdot EG.$$

Поэтому равенство (2) можно написать так:

$$\text{бок. пов. усеч. конуса} = 2\pi AD \cdot EG = AD \cdot 2\pi EG,$$

что и требовалось доказать.

3. Теорема остается верной и в применении к цилиндру, так как окружность, о которой говорится в теореме, равна окружности основания цилиндра.

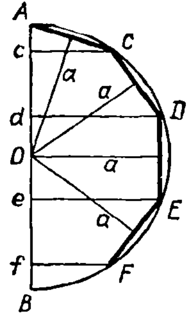


Черт. 449

426. Определение. За величину поверхности шарового пояса, образуемого вращением (черт. 449) какой-нибудь части (BE) полуокружности вокруг диаметра (AF), принимают п р е д е л, к которому стремится поверхность, образуемая вращением вокруг того же диаметра п р а в и л ь н о й в п и с а н н о й л о м а н о й л и н и и ($BCDE$), когда число ее сторон неограниченно удваивается.

Это определение распространяется и на сегментную поверхность, и на шаровую поверхность; в последнем случае ломаная линия вписывается в целую полуокружность.

427. Т е о р е м ы. 1. **Сегментная поверхность равна произведению ее высоты на окружность большого круга.**



Черт. 450

2. **Поверхность шарового пояса равна произведению его высоты на окружность большого круга.**

1) Впишем в дугу AF (черт. 450), производящую при вращении сегментную поверхность, правильную ломаную линию $ACDEF$ с произвольным числом сторон.

Поверхность, получающаяся от вращения этой ломаной, состоит из частей, образуемых сторонами AC, CD, DE, ... Эти части представляют собой боковые поверхности или полного конуса (от вращения AC), или усеченного конуса (от вращения CD, FE, . . .), или цилиндра (от вращения DE, если $DE \parallel AB$). Потому мы можем применить к ним лемму § **425**. При этом заметим, что каждый из перпендикуляров, восставленных из середин образующих до пересечения с осью, равен апофеме ломаной линии. Обозначив эту апофему буквой a, получим:

$$\text{пов. } AC = Ac \cdot 2\pi a;$$
$$\text{пов. } CD = cd \cdot 2\pi a;$$
$$\text{пов. } DE = de \cdot 2\pi a;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Сложив эти равенства почленно, найдем:

$$\text{пов. } ACDEF = Af \cdot 2\pi a.$$

При неограниченном удвоении числа сторон описанной ломаной апофема a стремится к пределу, равному радиусу шара R, а прямая Af остается без изменения; следовательно,

$$\text{предел пов. } ACDEF = Af \cdot 2\pi R.$$

Но предел поверхности $ACDEF$ принимают за величину сегментной поверхности, а прямая Af есть высота H поверхности; поэтому

$$\text{сегментная пов.} = H \cdot 2\pi R = 2\pi RH.$$

2) Предположим, что правильная ломаная линия вписана не в дугу AF, образующую сегментную поверхность, а в какую-нибудь дугу CF, образующую шаровой пояс (черт. 450). Это изменение, как легко видеть, нисколько не влияет на ход предыдущих рассуждений, поэтому и вывод остается тот же, т. е. что

$$\text{пов. шарового пояса} = H \cdot 2\pi R = 2\pi RH,$$

где буквой H обозначена высота cf шарового пояса.

428. Замечание. Поверхность шарового сегмента и пояса можно определить и независимо от понятия о пределе; например, для пояса можно дать такое определение:

за число, измеряющее поверхность шарового пояса, принимается такое число, которое больше всех чисел, измеряющих поверхности, производимые вращением правильных ломаных линий, вписанных в ту часть окружности, которая вращением производит пояс, но меньше всех чисел, измеряющих поверхности, производимые вращением правильных ломаных линий, описанных около этой части окружности.

Нетрудно убедиться, что такое число есть $2\pi RH$.

Подобное же определение можно дать и для объема шарового сектора.

429. Т е о р е м а. **Поверхность шара равна произведению окружности большого круга на диаметр, или поверхность шара равна учетверенной площади большого круга.**

Поверхность шара, производимую вращением полуокружности ADB (черт. 450), можно рассматривать как сумму поверхностей, образуемых вращением дуг AD и DB. Поэтому согласно предыдущей теореме можем написать:

$$\text{пов. шара} = 2\pi R \cdot Ad + 2\pi R \cdot dB = 2\pi R\,(Ad + dB) =$$
$$= 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2.$$

430. С л е д с т в и е. **Поверхности шаров относятся как квадраты радиусов или диаметров**, потому что, обозначая через R и R_1 радиусы, а через S и S_1 поверхности двух шаров, будем иметь:

$$S : S_1 = 4\pi R^2 : 4\pi R_1^2 = R^2 : R_1^2 = 4R^2 : 4R_1^2 = (2R)^2 : (2R_1)^2.$$

Объем шара и его частей

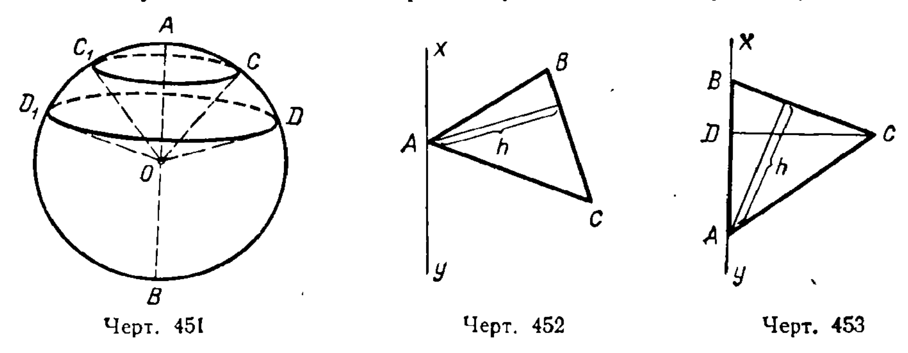
431. **Определение.** Тело, получаемое от вращения (черт. 451) кругового сектора (COD) вокруг диаметра (AB), не пересекающего его поверхности, называется *шаровым сектором*. Это тело ограничено боковыми поверхностями двух конусов и поверхностью шарового пояса; последняя называется *основанием* шарового сектора. Один из радиусов кругового сектора может совпадать с осью вращения; например, сектор AOC, вращаясь вокруг AO, производит шаровой сектор $OCAC_1$, ограниченный боковой поверхностью конуса и сегментной поверхностью.

Для нахождения объема шарового сектора и целого шара мы предварительно докажем следующую лемму.

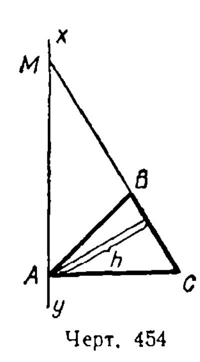
432. Л е м м а. **Если $\triangle ABC$ (черт. 452) вращается вокруг оси xy, которая лежит в плоскости треугольника, проходит через его вершину A, но не пересекает его площади, то объем тела, получаемого при этом вращении, равен произведению поверхности, образуемой противоположной стороной BC, на одну треть высоты h, опущенной на эту сторону.**

При доказательстве рассмотрим три случая.

1. О с ь   с о в п а д а е т   с о   с т о р о н о й AB (черт. 453). В этом случае искомый объем равен сумме объемов двух конусов, по-



Черт. 451 Черт. 452 Черт. 453



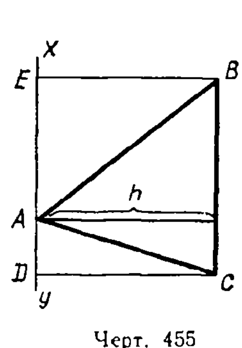
Черт. 454

лучаемых вращением прямоугольных треугольников BCD и DCA. Первый объем равен $\frac{1}{3}\pi CD^2\cdot DB$, а второй — $\frac{1}{3}\pi CD^2\cdot DA$; поэтому

$$\text{об. } ABC=\frac{1}{3}\pi CD^2(DB+DA)=\frac{1}{3}\pi CD\cdot CD\cdot BA.$$

Произведение $CD\cdot BA$ равно $BC\cdot h$, так как каждое из этих произведений выражает двойную площадь $\triangle ABC$; поэтому

$$\text{об. } ABC=\frac{1}{3}\pi CD\cdot BC\cdot h.$$



Черт. 455

Но произведение $\pi CD\cdot BC$ равно боковой поверхности конуса BDC; значит,

$$\text{об. } ABC=(\text{пов. } BC)\cdot\frac{1}{3}h.$$

2. Ось не совпадает с AB и не параллельна BC (черт. 454). В этом случае искомый объем равен разности объемов, производимых вращением треугольников AMC и AMB. По доказанному в первом случае объем $AMC=\frac{1}{3}h$ (пов. MC), а объем $AMB=$ $=\frac{1}{3}h$ (пов. MB); следовательно,

$$\text{об. } ABC=\frac{1}{3}h(\text{пов. } MC-\text{пов. } MB)=\frac{1}{3}h(\text{пов. } BC).$$

3. Ось параллельна стороне BC (черт. 455). Тогда искомый объем равен объему $DEBC$ без суммы объемов AEB и ACD; первый из них равен $\pi DC^2\cdot ED$, второй — $\frac{1}{3}\pi EB^2\cdot EA$ и третий — $\frac{1}{3}\pi DC^2\cdot AD$. Приняв теперь во внимание, что $EB=DC$, получим:

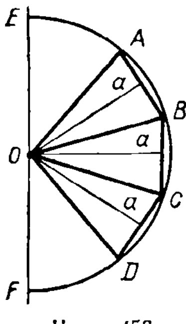
$$\text{об. } ABC=\pi DC^2\left[ED-\frac{1}{3}(EA+AD)\right]=\pi DC^2\left(ED-\frac{1}{3}ED\right)=$$
$$=\pi DC^2\cdot\frac{2}{3}ED=\frac{2}{3}\pi DC^2\cdot ED.$$

Произведение $2\pi DC\cdot ED$ выражает боковую поверхность цилиндра, производимого стороной BC; поэтому

$$\text{об. } ABC=(\text{пов. } BC)\frac{1}{3}DC=(\text{пов. } BC)\frac{1}{3}h.$$

433. Определение. За величину объема шарового сектора, производимого вращением вокруг диаметра (EF, черт. 456) кругового сектора (AOD), принимается предел, к которому стремится объем тела, обра-

зуемого вращением вокруг того же диаметра той части кругового сектора, которая ограничена крайними радиусами (OA и OD) и правильной ломаной линией ($ABCD$), вписанной в дугу кругового сектора, при условии, что число сторон этой ломаной неограниченно удваивается.

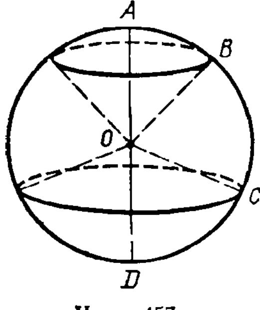


Черт. 456

434. Т е о р е м а. **Объем шарового сектора равен произведению поверхности его основания на треть радиуса.**

Пусть шаровой сектор производится вращением вокруг диаметра EF (черт. 456) сектора AOD.

Определим его объем V. Для этого впишем в дугу AD правильную ломаную линию $ABCD$ с произвольным числом сторон. Многоугольный сектор $OABCD$ произведет при вращении некоторое тело, объем которого обозначим буквой V_1. Объем этот есть сумма объемов, получаемых вращением треугольников OAB, OBC, OCD вокруг оси EF. Применим к этим объемам лемму, доказанную в § 432, причем заметим, что высоты треугольников равны апофеме a вписанной ломаной. Согласно этой лемме будем иметь:



Черт. 457

$$V_1 = \text{пов. } (AB)\frac{a}{3} + \text{пов. } (BC)\frac{a}{3} + \ldots =$$

$$= (\text{пов. } ABCD) \cdot \frac{a}{3}.$$

Вообразим теперь, что число сторон ломаной линии неограниченно удваивается. При этом условии поверхность $ABCD$ стремится к пределу, именно к поверхности шарового пояса AD, а апофема a имеет пределом радиус R; следовательно,

$$V = \text{пред. } V_1 = (\text{пов. пояса } AD) \cdot \frac{R}{3}.$$

З а м е ч а н и е. Теорема и ее доказательство не зависят от того, будет ли один из радиусов кругового сектора совпадать с осью вращения или нет.

435. Т е о р е м а. **Объем шара равняется произведению его поверхности на треть радиуса.**

Разбив полукруг $ABCD$ (черт. 457), производящий шар, на какие-нибудь круговые секторы AOB, BOC, COD, мы заметим, что объем шара можно рассматривать как сумму объемов шаровых секторов, производимых вращением этих круговых. Так как согласно предыду-

щей теореме

$$\text{об. } AOB = (\text{пов. } AB) \cdot \frac{1}{3} R,$$

$$\text{об. } BOC = (\text{пов. } BC) \cdot \frac{1}{3} R, \quad \text{об. } COD = (\text{пов. } CD) \cdot \frac{1}{3} R,$$

$$\text{то об. шара} = (\text{пов. } AB + \text{пов. } BC + \text{пов. } CD) \cdot \frac{1}{3} R =$$

$$= (\text{пов. } ABCD) \cdot \frac{1}{3} R.$$

436. Следствие 1. Обозначим высоту шарового пояса или сегментной поверхности через H, радиус шара через R, а диаметр через D; тогда поверхность пояса или сегментной поверхности выразится, как мы видели (427), формулой $2\pi RH$, а поверхность шара (429)— формулой $4\pi R^2$; поэтому

$$\text{об. шарового сектора} = 2\pi RH \cdot \frac{1}{3} R = \frac{2}{3} \pi R^2 H;$$

$$\text{об. шара} = 4\pi R^2 \cdot \frac{1}{3} R = \frac{4}{3} \pi R^3,$$

или

$$\text{об. шара} = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{D}{2}\right)^3 = \frac{1}{6} \pi D^3.$$

Отсюда видно, что **объемы шаров относятся как кубы их радиусов или диаметров.**

437. Следствие 2. **Поверхность и объем шара составляют $\frac{2}{3}$ соответственно полной поверхности и объема цилиндра, описанного около шара.**

Действительно, у цилиндра, описанного около шара, радиус основания равен радиусу шара, а высота равна диаметру шара; поэтому для такого цилиндра:

$$\text{полная пов.} = 2\pi R \cdot 2R + 2\pi R^2 = 6\pi R^2;$$

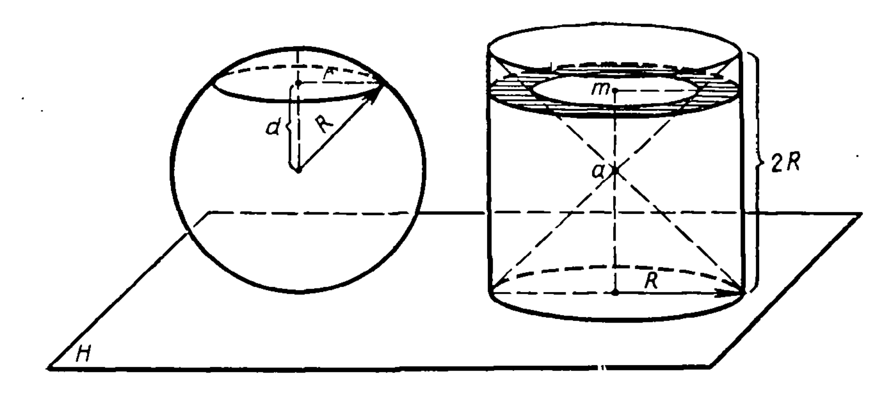
$$\text{об.} = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3.$$

Отсюда видно, что $\frac{2}{3}$ полной поверхности этого цилиндра равны $4\pi R^2$, т. е. равны поверхности шара, а $\frac{2}{3}$ объема цилиндра составляют $\frac{4}{3} \pi R^3$, т. е. объем шара [1].

[1] Это предложение было доказано Архимедом (в III в. до н. э.). Архимед выразил желание, чтобы чертеж этой теоремы был изображен в его гробнице, что и было исполнено римским военачальником Марцеллом. (См. Кэджори Ф. История элементарной математики.)

Предлагаем учащимся как полезное упражнение доказать, что поверхность и объем шара составляет $\frac{4}{9}$ соответственно полной поверхности и объема описанного конуса, у которого производящая равна диаметру основания. Соединив это предложение с указанным в следствии 2-м, мы можем написать такое равенство (верное и для поверхности, и для объемов):

$$\frac{\text{шар}}{4} = \frac{\text{цилиндр}}{6} = \frac{\text{конус}}{9}.$$



Черт. 458

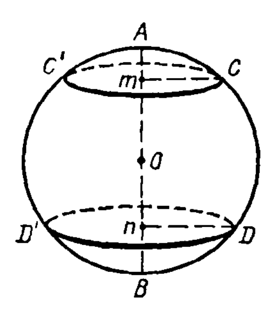
438. Замечание. Формулу для объема шара можно весьма просто получить, основываясь на принципе Кавальери (375) таким образом.

Пусть на одну и ту же плоскость H поставлены шар радиуса R и цилиндр, радиус основания которого равен R, а высота $2R$ (значит, это такой цилиндр, который может быть описан около шара радиуса R) (черт. 458). Вообразим, далее, что из цилиндра вырезаны и удалены два конуса, имеющие общую вершину на середине a оси цилиндра, а основания: у одного — верхнее основание цилиндра, у другого — нижнее. От цилиндра останется тогда некоторое тело, объем которого, как мы сейчас увидим, равен объему нашего шара. Проведем какую-нибудь плоскость, параллельную плоскости H и которая пересекалась бы с обоими телами. Пусть расстояние этой плоскости от центра шара будет d, а радиус круга, полученного в сечении плоскости с шаром, пусть будет r. Тогда площадь этого круга окажется равной $\pi r^2 = \pi(R^2 - d^2)$. Та же секущая плоскость даст в сечении с телом, оставшимся от цилиндра, круговое кольцо (оно на чертеже покрыто штрихами), у которого радиус внешнего круга равен R, а внутреннего d (прямоугольный треугольник, образованный этим радиусом и прямой am, есть равнобедренный, так как каждый острый угол его равен 45°). Значит, площадь этого кольца равна $\pi R^2 - \pi d^2 = \pi(R^2 - d^2)$. Мы видим, таким образом, что секущая плоскость, параллельная плоскости H, дает в сечении с шаром и телом, оставшимся от цилиндра, фигуры одинаковой площади; следовательно, согласно закону Кавальери объемы этих тел равны. Но объем тела, оставшегося от цилиндра, равен объему цилиндра без удвоенного объема конуса, т. е. он равен:

$$\pi R^2 \cdot 2R - 2 \cdot \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R = 2\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3;$$

значит, это и будет объем шара.

439. Определения. 1. Часть шара (ACC', черт. 459), отсекаемая от него какой-нибудь плоскостью (CC'), называется *шаровым сегментом*. Круг сечения называется *основанием* сегмента, а отрезок Am радиуса, перпендикулярного к основанию,— *высотой* сегмента.

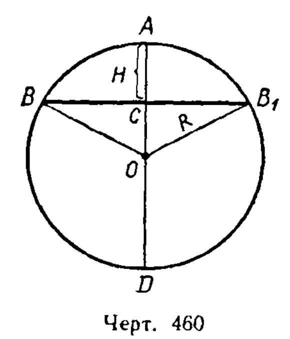


Черт. 459

2. Часть шара, заключенная между двумя параллельными секущими плоскостями (CC' и DD'), называется *шаровым слоем*. Круги параллельных сечений называются основаниями слоя, а расстояние mn между ними — его высотой.

Оба эти тела можно рассматривать как происходящие от вращения вокруг диаметра AB части круга AmC, или части $CmnD$.

440. Теорема. **Объем шарового сегмента равен объему цилиндра, у которого радиус основания есть высота сегмента, а высота равна радиусу шара, уменьшенному на треть высоты сегмента,** т. е.



Черт. 460

$$V=\pi H^2\left(R-\frac{1}{3}H\right),$$

где H есть высота сегмента, а R — радиус шара.

Объем шарового сегмента, получаемого вращением вокруг диаметра AD (черт. 460) части круга ACB, найдется, если из объема шарового сектора, получаемого вращением кругового сектора AOB, вычтем объем конуса, получаемого вращением треугольника COB. Первый из них равен $\frac{2}{3}\pi R^2H$, а второй $\frac{1}{3}\pi CB^2\cdot CO$. Так как CB есть средняя пропорциональная между AC и CD, то $CB^2=H(2R-H)$; поэтому

$$CB^2\cdot CO=H(2R-H)(R-H)=2R^2H-RH^2-2RH^2+H^3=$$
$$=2R^2H-3RH^2+H^3;$$

следовательно,

$$\text{об.}ABB_1=\text{об. }OBAB_1-\text{об. }OBB_1=\frac{2}{3}\pi R^2H-\frac{1}{3}\pi CB^2\cdot CO=$$
$$=\frac{2}{3}\pi R^2H-\frac{2}{3}\pi R^2H+\pi RH^2-\frac{1}{3}\pi H^3=$$
$$=\pi H^2\left(R-\frac{1}{3}H\right).$$

УПРАЖНЕНИЯ

449. Объем цилиндра, у которого высота вдвое более диаметра, равен 1 куб. м. Вычислить его высоту.

450. Диаметр основания цилиндра равен 16 см, а полная поверхность его содержит 1546 кв. см. Вычислить высоту этого цилиндра.

451. Найти вес железной цилиндрической трубки, внутренний диаметр которой равен 17 см, внешний диаметр равен 18 см, а длина равна 74 см; удельный вес железа 7,7.

452. В сосуд, имеющий форму конуса, обращенного вершиной вниз, вливают 345 г ртути. Зная, что угол при вершине конуса равен 60°, а удельный вес ртути 13,596, вычислить высоту, до которой налита в сосуде ртуть.

453. Вычислить боковую поверхность и объем усеченного конуса, у которого радиусы оснований суть 27 и 18 см, а образующая 21 см.

454. На каком расстоянии от центра шара, радиус которого равен 2,425 м, следует провести секущую плоскость, чтобы отношение поверхности меньшего сегмента к боковой поверхности конуса, имеющего общее с сегментом основание а вершину в центре шара, равнялось 7 : 4?

455. Найти объем тела, происходящего от вращения правильного 6-угольника со стороной a вокруг одной из своих сторон.

456. Вычислить радиус шара, описанного около куба, ребро которого равно 1 м.

457. Вычислить объем тела, происходящего от вращения правильного треугольника со стороной a вокруг оси, проходящей через его вершину и параллельной противоположной стороне.

458. Дан равносторонний $\triangle ABC$ со стороной a; на BC строят квадрат $BCDE$, располагая его в противоположную сторону от треугольника. Вычислить объем тела, происходящего от вращения 5-угольника $ABEDC$ вокруг стороны AB.

459. Дан квадрат $ABCD$ со стороной a. Через вершину A проводят прямую AR, перпендикулярную к диагонали AC, и вращают квадрат вокруг AR. Вычислить поверхность, образуемую контуром квадрата, и объем, образуемый площадью квадрата.

460. Дан правильный 6-угольник $ABCDEF$ со стороной a. Через вершину A проводят прямую AR перпендикулярную к радиусу OA, и вращают 6-угольник вокруг AR. Вычислить поверхность, образуемую контуром, и объем, образуемый площадью правильного 6-угольника.

461. В шаре, радиус которого равен 2, просверлено цилиндрическое отверстие вдоль его диаметра. Вычислить объем оставшейся части, если радиус цилиндрического отверстия равен 1.

461а. Вычислить объем шара, который, будучи вложен в коническую воронку с радиусом основания $r=5$ см и с боковой линией $l=13$ см, доходит верхней своей точкой до горизонтальной плоскости, проходящей через края воронки.

461б. Около круга с радиусом r описан равносторонний треугольник. Найти отношение объемов тел, которые производятся вращением фигуры вокруг высоты треугольника.

Задачи прикладного характера

462. Крыша башни имеет вид правильной 4-угольной пирамиды, у которой сторона основания равна 12 м, а высота 18 м. Сколько понадобится плиток на покрытие этой крыши, если каждая плитка имеет вид прямоугольника со сторонами 22 см и 18 см.

463. Требуется отлить правильную призму, объем которой составлял бы 36 867 куб. см и высота 42 см. Основание призмы должно быть в виде правильного 12-угольника. Вычислить его сторону.

464. Нужно вырыть в глинистой почве прямую канаву длиной 300 м и глубиной 1,5 м, ширина канавы вверху 4 м, у дна 2 м. Сколько рабочих дней нужно для этой работы, если на извлечение 10 куб. м земли в таком грунте требуется 4 рабочих дня.

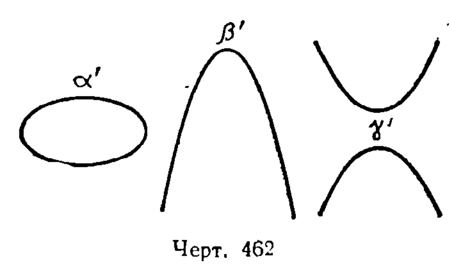
465. Величайшая из пирамид Египта (пирамида Хеопса) имеет высоту (приблизительно) 146 м; сторона ее квадратного основания равна 233 м. Предполагая, что эта пирамида сплошь сложена из камней, вычислить, какой высоты каменную стену толщиной в полметра и длиной от Ленинграда до Москвы (640 км) можно было бы соорудить из ее материала.

466. Найти объем цилиндрической колонны, у которой высота 25,5 м и диаметр основания 1,22 м.

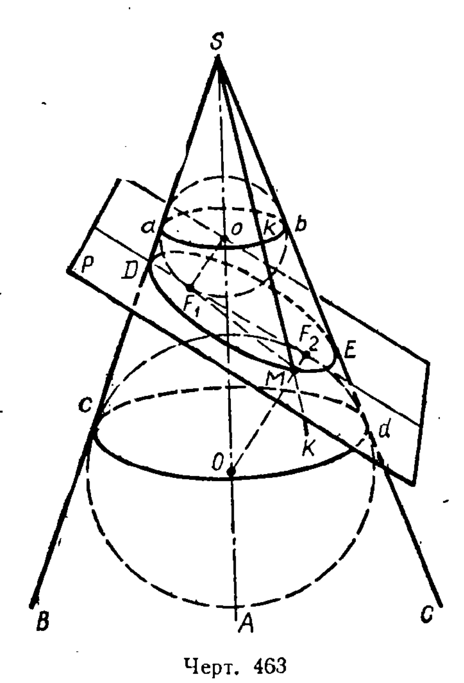
467. Вычислить вместимость ведра, имеющего форму усеченного конуса, если диаметр дна равен 18 см, диаметр отверстия 35 см и глубина 38,5 см.

468. Вычислить поверхность купола, имеющего форму полушара, у которого диаметр равен 5,25 м.

469. В цилиндрический сосуд, у которого диаметр основания равен 6 см, а высота 36 см, налита вода до половины высоты сосуда. На сколько поднимется уровень воды в сосуде, если в нее погрузить шар диаметром 5 см?



Черт. 462



Черт. 463

ось конуса SA (черт. 463) плоскость, перпендикулярную к секущей плоскости P, и пусть эта плоскость пересекается с конической поверхностью по образующим SB и SC, а с плоскостью P — по прямой DE, продолженной в обе стороны. Мы предположим, что плоскость P так расположена, что она пересекает все образующие нижней полы конуса. Впишем в $\Delta\, SDE$ круг центра o и другой круг (вневписанный) центра O. Пусть первый круг касается образующих в точках a и b, второй круг — в точках c и d; точки касания с прямой DE обозначим F_1 (для первого круга) и F_2 (для второго). Вообразим, что фигура BSC вместе с обоими кругами (но без прямой DE) вращается вокруг оси SA; тогда от вращения образуются коническая поверхность и два шара, которые будут касаться (изнутри) конической поверхности по параллельным кругам ab и cd. Шары эти будут также касаться и плоскости P в точках F_1 и F_2, так как радиусы oF_1 и OF_2 перпендикулярны к этой плоскости [1].

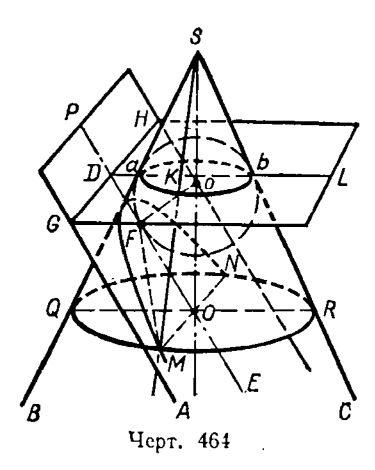
Заметив это, возьмем на кривой, по которой плоскость P пересекается с конической поверхностью, произвольную точку M и проведем прямые MF_1, MF_2 и образующую SM; пусть точки k и K будут точки пересечения прямой SM с параллельными окружностями ab и cd. Прямая MF_1, лежащая в плоскости P, касательной к верхнему шару, и проходящая через конец радиуса oF_1, есть касательная к этому шару (423); точно так же прямая MF_2 есть касательная к нижнему шару. С другой стороны, прямая Mk также есть касательная к верхнему шару,

---

[1] Радиус oF_1 можно рассматривать как одну сторону угла, служащего линейным углом двугранного угла, образованного плоскостью P с плоскостью BSC. Так как этот двугранный угол прямой, то и линейный прямой; значит, радиус oF_1 перпендикулярен к двум прямым плоскости P, именно к DE и к другой стороне линейного угла. Поэтому прямая oF_1 перпендикулярна к плоскости P (278), и, следовательно, плоскость эта касается шара (421). Так же можно объяснить, что плоскость P касается и другого шара в точке F_2.

а прямая MK есть касательная к нижнему шару. Так как все касательные, проведенные к шару из одной и той же точки, равны между собой [1], то $MF_1=Mk$ и $MF_2=MK$; поэтому

$$MF_1+MF_2=Mk+MK=kK=bd=ac.$$



Черт. 464

При изменении положения точки на кривой сечения отрезки kK, bd, ac, . . ., очевидно, не изменяются; не изменяется также и положение точек F_1 и F_2. Значит, **сечение конуса плоскостью, пересекающей все его образующие, есть геометрическое место таких точек, для каждой из которых сумма ее расстояний от двух неизменных точек есть величина постоянная.** Такая кривая называется *эллипсом*, а точки F_1 и F_2 — *фокусами* эллипса [2].

Замечания. 1) В частном случае эллипс обращается в точку, если плоскость P проходит через вершину конуса. 2) Совершенно так же можно доказать, что **сечение цилиндра вращения плоскостью, наклонной к его производящим, есть тоже эллипс.**

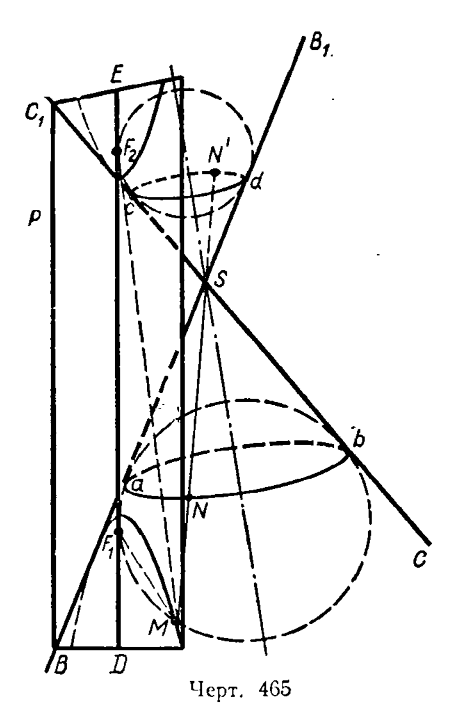
443. Сечение конуса плоскостью, параллельной одной образующей. Проведем через ось конуса SA (черт. 464) плоскость, перпендикулярную к секущей плоскости P, и пусть она пересекается с конической поверхностью по образующим SB и SC, а с плоскостью P — по прямой DE, параллельной образующей SC. Очевидно, что при таком положении секущей плоскости P она пересекает все образующие нижней полы конуса, кроме одной SC.

Впишем между параллельными прямыми SC и DE такой круг (центра o), который касался бы трех прямых SB, SC и DE в некоторых точках a, b и F. Вообразим, что фигура BSC вместе с кругом (но без прямой DE) вращается вокруг оси SA; тогда от вращения получаются коническая поверхность и шаровая, причем последняя касается конической поверхности по кругу ab, плоскость L которого перпендикулярна к оси SA; в то же время шаровая поверхность касается плоскости P в точке F[3]. Продолжив плоскость L до пересечения с плоскостью P, мы получим некоторую прямую GH, перпендикулярную к плоскости BSC (так как она есть линия пересечения двух плоскостей, перпендикулярных плоскости BSC). Возьмем на кривой, по которой плоскость P пересекается с поверхностью конуса, произвольную

[1] Каждая касательная, проведенная к шару из данной точки, есть катет прямоугольного треугольника, у которого гипотенуза равна расстоянию этой точки до центра шара, а другой катет есть радиус шара.

[2] Главнейшие свойства и способы вычерчивания эллипса, параболы и гиперболы изложены в книге: Киселев А. Элементы алгебры и анализа, ч. 2.

[3] Последнее касание можно доказать совершенно так, как это было сделано в выноске к предыдущему параграфу.



Черт. 465

точку M и проведем через нее образующую SM и плоскость, перпендикулярную к оси SA; плоскость эта в пересечении с конической поверхностью дает круг, диаметр которого QR параллелен ab, а в пересечении с плоскостью P — прямую $MN \| GH$. Соединим взятую точку M с F. Прямая MF, лежащая в плоскости P, касательной к шару, сама будет касательной к нему; с другой стороны, отрезок MK производящей MS, лежащий между кругами QR и ab, тоже будет касательным к шару и потому $MF=MK=bR=DO$. Из того, что прямая GH перпендикулярна к плоскости BSC, следует, что $GH \perp DO$; из того, что $MN \| GH$, следует, что $DO \perp MN$. Таким образом, отрезок DO есть общий перпендикуляр к параллельным прямым GH и MN и, следовательно, он равен расстоянию точки M от прямой GH. Мы видим, таким образом, что для всякой точки M, произвольно выбранной на линии сечения, расстояния ее от точки касания F и от прямой GH равны между собой. При изменении положения точки M на кривой сечения, очевидно, не изменяется ни положение точки F, ни положение прямой GH; значит, сечение конуса плоскостью (параллельной одной образующей) есть геометрическое место таких точек, из которых каждая одинаково отстоит от неизменной точки (F) и от неизменной прямой (GH). Такая кривая называется *параболой*. Точка F называется ее *фокусом*, а прямая GH — *директрисой*. Таким образом, **сечение конуса плоскостью, параллельной одной его производящей, есть парабола.** В частности, парабола обращается в прямую линию, если плоскость P касается поверхности конуса.

444. Сечение конуса плоскостью, пересекающей обе его полы. Пусть плоскость, проходящая через ось конуса и перпендикулярная к секущей плоскости P, пересекает полы конуса по образующим BB_1 и CC_1 (черт. 465) и плоскость P по прямой DE. Построим, как и прежде, два шара, касающиеся плоскости P в точках F_1 и F_2 и поверхности конуса по кругам ab и cd. Возьмем произвольную точку M на кривой сечения, проведем через нее прямые MF_1 и MF_2 и образующую MSN'. Пусть образующая эта пересекается с кругом ab в точке N, а с кругом cd в точке N'. Так же как это мы делали в предыдущих случаях, найдем, что $MF_1=MN$ и $MF_2=MN'$. Значит,

$$MF_2-MF_1=MN'-MN=NN'=ad=bc.$$

Так как отрезки ad, bc, . . . остаются без изменения с изменением положения точки M на кривой, а также не изменяется положение точек F_1 и F_2, то **сечение конуса плоскостью, пересекающей обе его полы, есть геометрическое место таких точек, для каждой из которых разность ее расстояний от двух неизменных точек есть величина постоянная.** Такая кривая называется *гиперболой*, а точки F_1 и F_2— ее *фокусами*.

В частности, гипербола обращается в две пересекающиеся прямые линии, если секущая плоскость, пересекая обе полы конуса, проходит через его вершину.

445. Замечание о сечении плоскостью прямого кругового цилиндра. Мы знаем, что сечение цилиндра (прямого кругового) плоскостью, перпендикулярной к его оси, есть круг (393). Кроме того, очевидно, что сечение цилиндра плоскостью, параллельной его оси или проходящей через ось, есть прямоугольник, обращающийся в частном случае в прямую линию, если плоскость касается поверхности цилиндра. Что касается сечения цилиндра плоскостью, непараллельной его оси и неперпендикулярной к ней, то с помощью чертежа, аналогичного черт. 464, можно доказать, что такое сечение всегда есть эллипс, тем более приближающийся к кругу, чем ближе к прямому углу тот угол, который секущая плоскость образует с осью конуса.

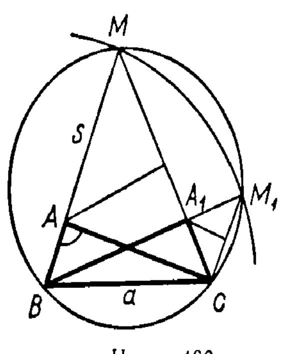
II. ГЛАВНЕЙШИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ

1. **Метод геометрических мест**, известный еще со времен Платона (IV в. до н. э.), состоит в следующем. Положим, что решение предложенной задачи сводится к нахождению некоторой точки, которая должна удовлетворять известным условиям. Отбросим из этих условий какое-нибудь одно; тогда задача сделается неопределенной, т. е. ей может удовлетворять бесчисленное множество точек. Эти точки составят некоторое геометрическое место. Построим его, если это окажется возможным. Затем примем во внимание отброшенное нами условие и откинем какое-нибудь другое; тогда задача будет снова удовлетворяться бесчисленным множеством точек, которые составят новое геометрическое место. Построим его, если это возможно. Искомая точка, удовлетворяя всем условиям, должна лежать на обоих геометрических местах, т. е. она должна находиться в их пересечении. Задача окажется возможной или невозможной, смотря по тому, пересекаются или нет найденные геометрические места; и задача будет иметь столько решений, сколько окажется точек пересечения.

Приведем на этот метод один пример, который вместе с тем покажет нам, как иногда приходится вводить в чертеж вспомогательные линии с целью принять во внимание все данные условия задачи.

Задача. Построить треугольник по основанию a, углу при вершине A и сумме s боковых сторон.

Пусть ABC будет искомый треугольник (черт. 466). Чтобы принять во внимание данную сумму боковых сторон, продолжим BA и отложим $BM=s$. Проведя MC, получим вспомогательный ΔBMC. Если мы построим этот треугольник, то затем легко построим и ΔABC. Построение ΔBMC сводится к нахождению точки M.



Черт. 466

Заметив, что ΔAMC равнобедренный ($AM=AC$) и, следовательно, $\angle M=\frac{1}{2}A$ (так как $\angle M+\angle C=\angle A$), мы видим, что точка M должна удовлетворять двум условиям: 1) она удалена от B на расстояние s; 2) из нее данная конечная прямая BC видна под углом, равным $\frac{1}{2}A$.

Отбросив второе условие, мы получим бесчисленное множество точек M, лежащих на окружности, описанной из B радиусом, равным s. Отбросив первое условие, мы получим также бесчисленное множество точек M, лежащих на дуге сегмента, построенного на BC и вмещающего угол, равный $\frac{1}{2}A$. Таким образом, нахождение точки M сводится к построению двух геометрических мест, из которых каждое мы построить умеем. Задача окажется невозможной, если эти геометрические места не будут иметь общих точек; задача будет иметь одно или два решения, смотря по тому, касаются или же пересекаются эти места (на нашем чертеже получаются два треугольника ABC и A_1BC, удовлетворяющие условиям задачи).

Иногда задача сводится не к определению точки, а к нахождению прямой, удовлетворяющей нескольким условиям. Если отбросим одно из них, то получим бесчисленное множество прямых; при этом может случиться, что эти прямые определяют некоторую линию (например, все они будут касательными к некоторой окружности). Отбросив другое условие и приняв во внимание то, которое было откинуто ранее, мы получим снова бесчисленное множество прямых, которые, быть может, определят некоторую другую линию. Приведем пример.

З а д а ч а. Провести секущую к двум данным окружностям O и O_1 так, чтобы части секущей, заключенные внутри окружностей, равнялись соответственно данным длинам a и a_1.

Если возьмем только одно условие (например, чтобы часть секущей, лежащая внутри круга O, равнялась a), то получим бесчисленное множество секущих, которые все должны быть одинаково удалены от центра этого круга (так как равные хорды одинаково удалены от центра). Поэтому если в круге O где-нибудь построим хорду, равную a, а затем радиусом, равным расстоянию этой хорды от центра, опишем окружность, концентрическую с O, то все секущие, о которых идет речь, должны касаться этой вспомогательной окружности; подобным образом, приняв во внимание только второе условие, мы увидим, что искомая секущая должна касаться второй вспомогательной окружности, концентрической с O_1. Значит, вопрос приводится к построению общей касательной к двум окружностям.

Полезно заметить следующие геометрические места (из которых некоторые были указаны в тексте книги, а доказательство других предоставляем самим учащимся):

1) Геометрическое место точек, одинаково удаленных от двух данных точек A и B, есть перпендикуляр, проведенный к отрезку AB через его середину (§ 56).

2) Геометрическое место точек, одинаково удаленных от сторон угла, есть биссектриса этого угла (§ 56).

3) Геометрическое место точек, удаленных от данной прямой на данное расстояние d, состоит из двух прямых, параллельных данной и расположенных по обе стороны от нее на расстоянии d (§ 92).

4) Геометрическое место точек, из которых данный отрезок прямой виден под данным углом a, состоит из дуг двух сегментов, которые вме-

щают в себя угол, равный a (§ 130), и расположены по разные стороны данного отрезка.

5) Геометрическое место точек, делящих в данном отношении отрезки параллельных прямых, заключенных между сторонами данного угла, есть прямая, проходящая через вершину угла и какую-нибудь одну из этих точек.

6) Геометрическое место точек, расположенных внутри данного угла и расстояния которых от сторон этого угла находятся в данном отношении $m : n$, есть прямая, проходящая через вершину угла и какую-нибудь одну из таких точек.

7) Геометрическое место точек, делящих в данном отношении все равные хорды данной окружности, есть окружность, концентрическая с данной.

8) Геометрическое место точек, из которых касательные, проведенные к данной окружности, имеют данную длину, есть окружность, концентрическая с данной.

9) Геометрическое место точек, квадраты расстояний которых от двух данных точек A и B имеют постоянную сумму, есть окружность, центр которой лежит в середине прямой AB (доказательство основывается на теореме § 168).

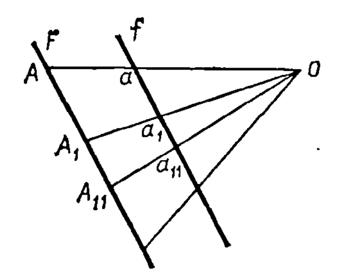
10) Геометрическое место точек, квадраты расстояний которых от двух данных точек A и B имеют постоянную разность, есть прямая, перпендикулярная к прямой AB.

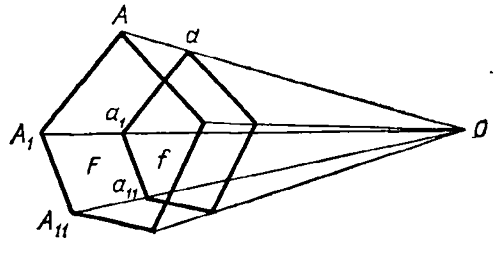
11) Геометрическое место точек, сумма расстояний которых от сторон данного угла постоянна, есть лежащий внутри угла отрезок прямой, отсекающей от угла равнобедренный треугольник. Продолжения этого отрезка (в обе стороны) представляют геометрическое место точек, разность расстояний которых от сторон угла постоянна.

12) Геометрическое место точек, делящих в данном отношении хорды, проведенные из точки A данной окружности, есть окружность, касательная к данной в точке A.

Последнее геометрическое место составляет частный случай следующего более общего (см. § 167—171):

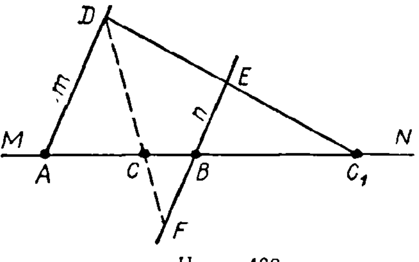
13) Если из данной точки O (черт. 467) к различным точкам A, A_{I}, A_{II}, . . . какой-нибудь фигуры F проведем прямые OA, OA_{I}, OA_{II}, . . . и на каждой из них отложим части Oa, Oa_{I}, Oa_{II}, . . . такие, что $Oa : OA = Oa_{\text{I}} : OA_{\text{I}} = Oa_{\text{II}} : OA_{\text{II}} = \ldots$, то геометрическое место точек





Черт. 467

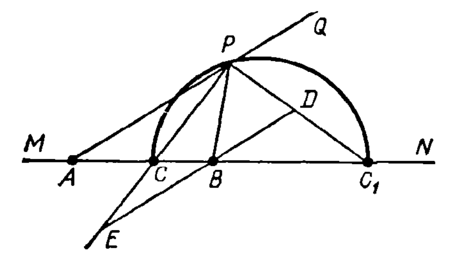
$a, a_1, a_{11}, \ldots$ есть фигура f, подобная фигуре F и одинаково с ней расположенная относительно точки O.



Черт. 468

Таким образом, если фигура F есть прямая, то и f есть прямая, параллельная F; если F есть многоугольник, то и f есть многоугольник, подобный F и одинаково с ним расположенный; если F — окружность, то и f — окружность.

Когда пропорциональные части Oa, Oa_1, Oa_{11}, ... откладываются на продолжениях линий OA, OA_1 (за точку O), то получается тоже подобная фигура, но расположенная о б р а т н о относительно центра подобия O.



Черт. 469

К этим геометрическим местам добавим еще следующее: **геометрическое место точек, расстояния которых от двух данных точек находятся в данном отношении $m : n$, есть окружность, когда $m \neq n$, и прямая, когда $m = n$.**

Предварительно покажем, что если $m \neq n$, то на неограниченной прямой MN (черт. 468), проходящей через точки A и B, можно найти две (и только две) точки C и C_1, принадлежащие указанному геометрическому месту, т. е. такие, что $CA : CB = m : n$ и $C_1A : C_1B = m : n$. Чтобы найти такие точки, проведем через A и B две какие-нибудь параллельные между собой прямые и на них отложим $AD = m$, $BE = n$ и $BF = n$. Проведя затем DE и DF, получим в пересечении с MN две искомые точки C и C_1 (последняя точка, конечно, получится только тогда, когда $m \neq n$), так как из подобных треугольников ACD и CBF, а затем из подобных треугольников ADC_1 и BEC_1 получим пропорции

$$AC : CB = AD : BF = m : n$$

и

$$AC_1 : BC_1 = AD : BE = m : n.$$

Заметив это, допустим, что (при $m \neq n$) существует еще какая-нибудь точка P (черт. 469), удовлетворяющая пропорции

$$PA : PB = m : n.$$

Проведя PC и PC_1, мы должны заключить (176, 178), что первая из этих прямых есть биссектриса угла APB, а вторая — биссектриса угла BPQ; вследствие этого угол CPC_1, составленный из двух половин смежных углов, должен быть прямой, а потому вершина его P лежит на окружности, описанной на отрезке CC_1, как на диаметре. Мы доказали, таким образом, что всякая точка P, принадлежащая искомому геоме-

трическому месту, лежит на окружности диаметра CC_1. Теперь докажем обратное предложение.

Пусть P (черт. 469) есть произвольная точка этой окружности. Проведя через B прямую $ED \parallel AP$, будем иметь следующие пропорции:

$$PA : BD = C_1A : C_1B = m : n \tag{1}$$

и

$$PA : BE = CA : CB = m : n. \tag{2}$$

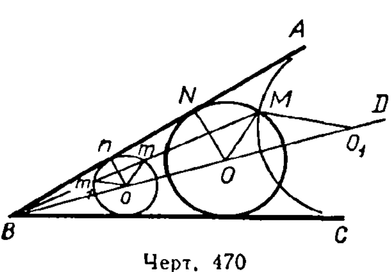
Откуда находим: $BD = BE$, т. е. точка B есть середина прямой DE. Так как угол CPC_1 вписанный, опирающийся на диаметр, то он прямой; поэтому $\Delta\, DPE$ прямоугольный. Вследствие этого, если середину B гипотенузы DE примем за центр и опишем радиусом $BD = BE$ окружность, то эта окружность пройдет через P, значит, $BD = PB$. Подставив теперь в пропорцию (1) на место BD равную длину PB, получим: $PA : PB = m : n$.

Таким образом, мы доказали, что когда $m \neq n$, искомое геометрическое место есть окружность, построенная на отрезке CC_1 как на диаметре.

Допустим теперь, что $m = n$. Тогда не будет вовсе точки C_1, а точка C окажется лежащей в середине отрезка AB. Очевидно, что перпендикуляр к AB, проведенный через эту середину, будет искомым геометрическим местом.

2. **Метод подобия.** Он состоит в том, что, пользуясь некоторыми данными задачи, строят сначала фигуру, подобную искомой, а затем переходят к последней. Этот метод особенно удобен тогда, когда одна данная величина есть длина, а все прочие или углы, или отношения линий; таковы, например, задачи: построить треугольник по данному углу, стороне и отношению двух других сторон или по двум углам и длине некоторой прямой (высоте, медиане, биссектрисе и т. п.); построить квадрат по данной сумме или разности между диагональю и стороной и т. п.

В этих задачах положение искомой фигуры остается произвольным; но во многих вопросах требуется построить фигуру, положение которой относительно данных точек или линий вполне определенно. При этом может случиться, что, отрешившись от какого-нибудь одного из условий положения и оставив все остальные, мы получим бесчисленное множество фигур, подобных искомой. В таком случае метод подобия может быть употреблен с пользой. Приведем пример.



Черт. 470

Задача. В данный угол ABC вписать окружность, которая проходила бы через данную точку M (черт. 470).

Отбросим на время требование, чтобы окружность проходила через точку M. Тогда вопросу удовлетворяет бесчисленное множество окружностей, центры которых лежат на биссектрисе BD. Построим одну из

таких окружностей, например ту, центр которой есть o. Возьмем на ней точку m, сходственную точке M, т. е. лежащую на луче подобия MB, и проведем радиус mo. Если теперь построим $MO \parallel mo$, то точка O будет центром искомого круга. Действительно, проведя к стороне AB перпендикуляры ON и on, мы получим подобные треугольники MBO и mBo, NBO и nBo, из которых будем иметь:

$$MO : mo = BO : Bo; \quad NO : no = BO : Bo,$$

откуда

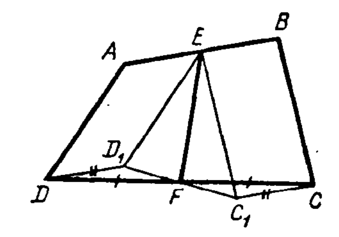
$$MO : mo = NO : no.$$

Но $mo = no$; следовательно, и $MO = NO$, т. е. окружность, описанная из центра O радиусом OM, касается стороны AB; а так как ее центр лежит на биссектрисе угла, то она касается и стороны BC.

Если за сходственную точку возьмем другую точку m_1 пересечения луча MB с окружностью o, то найдем другой центр O_1 искомого круга. Следовательно, задача допускает два решения.

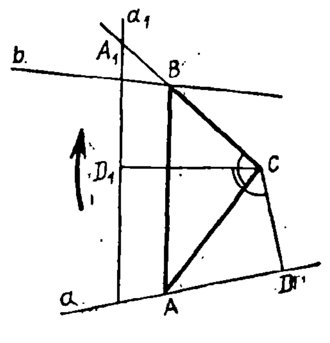
3. Метод параллельного перенесения. Весьма часто бывает полезно переместить некоторые части данной или искомой фигуры в другое положение, при котором легче обнаружить зависимость между данными элементами и искомыми. Существуют различные приемы такого перемещения. Рассмотрим сначала параллельное перенесение (§ 104).

Задача. Построить четырехугольник $ABCD$ (черт. 471), зная все его стороны и прямую EF, соединяющую середины противоположных сторон.

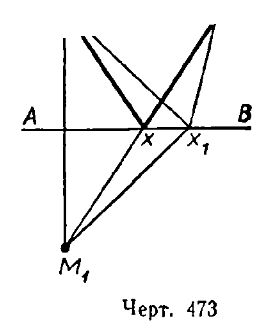


Черт. 471

Чтобы сблизить между собой данные линии, перенесем параллельно самим себе стороны AD и BC в положения ED_1 и EC_1. Тогда прямая DD_1 будет равна и параллельна AE, а прямая CC_1 равна и параллельна EB; но так как $AE = EB$, то $DD_1 = CC_1$ и $DD_1 \parallel CC_1$. Вследствие этого треугольники DD_1F и CC_1F будут равны (так как у них $DD_1 = CC_1$, $DF = CF$ и $\angle D_1DF = \angle FCC_1$); значит, $\angle D_1FD = \angle CFC_1$ и потому линия D_1FC_1 должна быть прямая, т. е. фигура ED_1FC_1 окажется треугольником. В этом треугольнике известны две стороны ($ED_1 = AD$ и $EC_1 = BC$) и медиана EF, проведенная к третьей стороне. По этим данным легко построить треугольник (если продолжим медиану EF за точку F на длину, равную ей, и полученную точку соединим с D_1 и C_1, то получим параллелограмм, у которого известны стороны и одна диагональ). Найдя ΔED_1C_1, строим треугольники D_1DF и C_1CF, а затем и четырехугольник $ABCD$.



Черт. 472



Черт. 473

...бывает полезно перенести параллельно данному направлению целую фигуру, например окружность (см., например, ниже задачу 501).

4. Метод вращения вокруг точки. Для уяснения этого особенного вида перенесения приведем следующий пример:

З а д а ч а. Даны по положению точка C (черт. 472) и две бесконечные прямые a и b. Построить треугольник ABC, одна вершина которого была бы в C, а две другие лежали бы на прямых a и b и который, кроме того, был бы подобен данному треугольнику (не помещенному на чертеже).

Пусть задача решена. Заметив, что углы искомого треугольника даны, обозначим тот из них, который находится при точке C, буквой ω. Повернем всю фигуру вокруг точки C в направлении, указанном стрелкой, на угол ω и найдем положение, которое займет после вращения прямая a. Для этого достаточно опустить на a перпендикуляр CD, а затем повернуть его на угол ω в положение CD_1 и провести через D_1 прямую a_1, перпендикулярную к CD_1. Прямая a_1 и будет то положение, которое займет после вращения прямая a. Так как при вращении все части фигуры повертываются на один и тот же угол, то CA после вращения пойдет по CB, вследствие этого точка A упадет в A_1, т. е. в точку пересечения CB с a_1. Так как отношение CA и CB или, все равно, отношение CA_1 к CB дано (пусть это будет $m : n$), то теперь вопрос сведен к тому, чтобы через точку C провести такую прямую CA_1, которая пересекалась бы с прямыми b и a_1 в точках B и A_1, удовлетворяющих пропорции $CA_1 : CB = m : n$. Чтобы провести такую прямую, достаточно разделить CD_1 в некоторой точке x так, чтобы $CD_1 : Cx = m : n$, и через точку деления провести прямую, параллельную a_1; пересечение этой прямой с b определит точку B.

5. Метод вращения вокруг прямой (или метод симметрии). Иногда прием построения легко обнаруживается, если перегнем часть чертежа вокруг некоторой прямой так, чтобы эта часть заняла симметричное положение по другую сторону от этой прямой (§ 36). Приведем пример.

З а д а ч а. На бесконечной прямой AB (черт. 473) найти точку x, чтобы сумма ее расстояний от данных точек M и N была наименьшая.

Если, перегнув чертеж вокруг AB, приведем точку M в симметричное относительно AB положение M_1, то расстояние точки M от какой угодно точки прямой AB сделается равным расстоянию точки M_1 от той же точки прямой AB. Поэтому суммы $Mx+xN$, Mx_1+x_1N, ... равны соответственно суммам M_1x+xN, $M_1x_1+x_1N$, ...; но из последних сумм наименьшая будет та, при которой линия M_1xN прямая. Отсюда становится ясным прием построения.

То же самое построение решает и другую задачу: на прямой AB найти такую точку x, чтобы прямые xM и xN, проведенные от нее к данным точкам M и N, составляли с AB равные углы.

6. Метод обратности. Иногда бывает полезно перевернуть, так сказать, задачу, т. е. данные условия задачи взять за искомые и наоборот. Приведем пример.

Задача. В данный треугольник ABC вписать другой треугольник, у которого стороны были бы параллельны сторонам другого данного треугольника MNP.

Перевернем вопрос: опишем около ΔMNP другой $\Delta\ A_1B_1C_1$, у которого стороны были бы параллельны сторонам $\Delta\ ABC$ (что, конечно, легко выполнить). Тогда мы получим фигуру, подобную искомой; разделив затем какую-нибудь сторону $\Delta\ ABC$ на две части, пропорциональные отрезкам сходственной стороны $\Delta\ A_1B_1C_1$, мы получим одну из вершин искомого треугольника.

7. Алгебраический метод. Сущность этого метода, а также и примеры задач, решаемых им, были указаны ранее (§ 205, 206 и задачи 290—292, 357—364).

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ, РЕШАЕМЫХ МЕТОДАМИ, УКАЗАННЫМИ В ПРИЛОЖЕНИЯХ

1. Метод геометрических мест

485. Построить четырехугольник $ABCD$, около которого можно было бы описать окружность, зная его стороны AB и BC, диагональ AC и угол между диагоналями.

486. Построить треугольник по основанию, углу при вершине и сумме или разности квадратов двух других сторон (например, основание a, угол при вершине A и сумма квадратов боковых сторон k^2).

487. Около равностороннего треугольника описать квадрат так, чтобы обе фигуры имели общую вершину.

488. Найти точку, из которой три отрезка данной прямой AB, BC и CD были бы видны под равными углами.

489. Внутри треугольника найти такую точку, расстояния которой до сторон треугольника относились бы между собой, как 6 : 3 : 2. (См. задачу 272.)

490. Найти точку, из которой три данные круга видны под равными углами. (Указание. Надо сначала найти геометрическое место точек, из которых два данных круга видны под равными углами.)

491. Найти по данной окружности такую точку, чтобы сумма ее расстояний от двух данных прямых была наименьшая.

492. Превратить данный треугольник в равновеликий треугольник с данным основанием и с данным углом при вершине.

493. В данной окружности провести две хорды данной длины так, чтобы они пересекались под данным углом и одна из них проходила через данную точку.

2. Метод подобия

494. Построить треугольник по углу при вершине, высоте и отношению отрезков, на которые основание делится высотой.

495. Вписать квадрат: 1) в данный треугольник; 2) в данный сектор; 3) в данный сегмент.

496 Через данную точку провести прямую таким образом, чтобы три данные прямые, исходящие из одной точки, отсекали от искомой прямой отрезки, находящиеся в данном отношении.

497. Через данную точку A окружности провести хорду AD, которая пересекалась бы с данной хордой BC в такой точке E, чтобы прямые DE и DC находились в данном отношении.

498. Провести внутри треугольника прямую, параллельную основанию, так, чтобы эта прямая была средней пропорциональной между отрезками одной боковой стороны.

499. Построить равнобедренный треугольник, зная его боковую сторону и сумму высоты с основанием.

500. На данной прямой найти такую точку, чтобы расстояния от данной точки и другой данной прямой находились в данном отношении.

3. Метод параллельного перенесения

501. Между двумя данными окружностями провести прямую данной длины a параллельно данной прямой MN. (Указание. Надо один круг приблизить к другому, перенеся его параллельно прямой MN на расстояние a.)

502. В круге даны две хорды AB и CD. Найти на окружности такую точку x, чтобы прямые xA и xB отсекали от хорды CD отрезок, равный данной длине (метод параллельного перенесения и геометрических мест).

503. В данном треугольнике ABC найти такие точки: x на стороне AB и y на стороне BC, чтобы прямая xy была данной длины и отношение $Ax : Cy$ было данное (параллельное перенесение и метод подобия).

504. Построить трапецию по одному ее углу, двум диагоналям и средней линии.

505. Построить четырехугольник по трем сторонам a, b, c и двум углам α и β, прилежащим к неизвестной стороне.

506. К двум данным кругам провести общую секущую, параллельную данной прямой, так, чтобы сумма или разность хорд, определяемых точками пересечений была равна данной длине.

507. С корабля видны два маяка, положения которых на карте известны под данным углом Когда корабль прошел известную длину в данном направлении те же самые маяки видны под другим данным углом. Определить на карте место корабля. (Геометрическое место и параллельное перенесение.)

4. Метод вращения вокруг точки

508. Построить треугольник, подобный данному треугольнику, так, чтобы одна его вершина лежала в данной точке A, а две другие вершины находились на данных окружностях O и O_1 (одна на O, другая на O_1).

509. Дан круг и вне его две точки A и B; провести к кругу касательную так, чтобы расстояния точки A до этой касательной и до перпендикуляра, опущенного из B на касательную, были в данном отношении. (Указание. Надо повернуть вокруг точки A на 90° прямоугольный треугольник, у которого гипотенуза есть AB, а один катет — расстояние точки A до перпендикуляра, опущенного на касательную из точки B. Эту же задачу можно решить при помощи одновременного пользования методом подобия и методом геометрических мест.)

510. Построить треугольник, стороны которого были бы пропорциональны числам 3, 4 и 5 и вершины которого лежали бы на трех данных параллельных прямых.

5. Метод вращения вокруг прямой

511. Построить по четырем сторонам четырехугольник $ABCD$, зная, что его диагональ AC делит угол A пополам.

512. Конечная прямая AB пересечена в точке C прямой MN. Найти на MN такую точку, из которой отрезки AC и BC видны под равными углами (эту задачу можно также решить методом геометрических мест).

513. Построить квадрат, две противоположные вершины которого находились бы на двух данных окружностях, а две другие — на данной прямой, расположенной между окружностями.

514. На прямоугольном бильярде дано положение двух шаров A и B. В каком направлении надо толкнуть шар A, чтобы он, отразившись последовательно от всех четырех бортов, ударил затем шар B?

515. Дан угол и внутри его точка. Построить треугольник наименьшего периметра такой, чтобы одна его вершина лежала в данной точке, а две другие на сторонах угла.

516. Решить методом симметрии задачу, которая в тексте была решена методом подобия: в данный угол вписать окружность, которая проходила бы через точку, данную внутри угла.

6. Метод обратности

517. В данный сектор вписать треугольник, равный данному треугольнику.

518. Построить треугольник, равный данному треугольнику, так, чтобы его вершины лежали на трех данных прямых, исходящих из одной точки.

519. Построить треугольник, подобный данному треугольнику, так, чтобы его вершины лежали на трех данных концентрических окружностях.

520. В данный треугольник вписать треугольник, подобный другому данному треугольнику, так, чтобы одна из его вершин лежала в точке, данной на основании.

Таблица тригонометрических функций углов от 0° до 90° через каждый градус

Градусы	Синусы	Косинусы	Тангенсы	Котангенсы	Градусы
0	0,00000	1,00000	0,00000	∞	90
1	0,01745	0,99985	0,01746	57,28996	89
2	0,03490	0,99939	0,03492	28,63608	88
3	0,05234	0,99863	0,05241	19,08114	87
4	0,06976	0,99756	0,06993	14,30067	86
5	0,08716	0,99619	0,08749	11,43005	85
6	0,10453	0,99452	0,10510	9,51436	84
7	0,12187	0,99255	0,12278	8,14435	83
8	0,13917	0,99027	0,14054	7,11537	82
9	0,15643	0,98769	0,15838	6,31375	81
10	0,17365	0,98481	0,17633	5,67128	80
11	0,19081	0,98163	0,19438	5,14455	79
12	0,20791	0,97815	0,21256	4,70463	78
13	0,22495	0,97437	0,23087	4,33148	77
14	0,24192	0,97030	0,24933	4,01078	76
15	0,25882	0,96593	0,26795	3,73205	75
16	0,27564	0,96126	0,28675	3,48741	74
17	0,29237	0,95630	0,30573	3,27685	73
18	0,30902	0,95106	0,32492	3,07768	72
19	0,32557	0,94552	0,34433	2,90421	71
20	0,34202	0,93969	0,36397	2,74748	70
21	0,35837	0,93358	0,38386	2,60509	69
22	0,37461	0,92718	0,40403	2,47509	68
23	0,39073	0,92050	0,42447	2,35585	67
24	0,40674	0,91355	0,44523	2,24604	66
25	0,42262	0,90631	0,46631	2,14451	65
26	0,43837	0,89879	0,48773	2,05030	64
27	0,45399	0,89101	0,50953	1,96261	63
28	0,46947	0,88295	0,53171	1,88073	62
29	0,48481	0,87462	0,55431	1,80405	61
30	0,50000	0,86603	0,57735	1,73205	60
31	0,51504	0,85717	0,60086	1,66428	59
32	0,52992	0,84805	0,62487	1,60033	58
33	0,54464	0,83867	0,64941	1,53987	57
34	0,55919	0,82904	0,67451	1,48256	56
35	0,57358	0,81915	0,70021	1,42815	55
36	0,58779	0,80902	0,72654	1,37638	54
37	0,60182	0,79864	0,75355	1,32704	53
38	0,61566	0,78801	0,78129	1,27994	52
39	0,62932	0,77715	0,80978	1,23490	51
40	0,64279	0,76604	0,83910	1,19175	50
41	0,65606	0,75471	0,86929	1,15037	49
42	0,66913	0,74314	0,90040	1,11061	48
43	0,68200	0,73135	0,93252	1,07239	47
44	0,69466	0,71934	0,96569	1,03553	46
45	0,70711	0,70711	1,00000	1,00000	45

Некоторые числа, часто употребляемые при решении задач

$$\pi = 3{,}1416 \left(\text{около } 3\frac{1}{7}\right), \quad \frac{1}{\pi} = 0{,}3183, \quad \frac{\pi}{180} = 0{,}01745,$$

$$\frac{180}{\pi}\,(\text{радиан}) = 57°17'44'',$$

$$\sqrt{2} = 1{,}4142, \quad \sqrt{3} = 1{,}73205, \quad \sqrt{5} = 2{,}2361, \quad \sqrt{6} = 2{,}4495.$$

СОДЕРЖАНИЕ

Отдел II. Окружность

Отдел III. Подобные фигуры

Отдел IV. Правильные многоугольники и вычисление длины окружности

Отдел V. Измерение площадей

Отдел VI. Определение длины окружности и площади круга на основании аксиомы непрерывности

СТЕРЕОМЕТРИЯ

Отдел I. Прямые и плоскости

Отдел II. Начала проекционного черчения

Отдел III. Многогранники

Отдел IV. Круглые тела

ПРИЛОЖЕНИЯ

Андрей Петрович Киселев

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Книга для учителя

Редактор *Л. М. Котова*

Художник *Б. Л. Николаев*

Художественный редактор *Е. Н Карасик*

Технический редактор *В. В. Новоселова*

Корректоры *О. С. Захарова, О. В. Ивашкина*

ИБ № 5670

Сдано в набор 31.07.79. Подписано к печати 13.12.79. 60×90[1]/16. Бум. типогр. № 2. Гарн. литерат. Печать высокая. Усл. печ л. 18,0. Уч-изд. л. 20,19. Тираж 150000 экз. Заказ № 527. Цена 70 коп

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва. 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано с матриц ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени Первой Образцовой типографии имени А. А Жданова Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, М-54. Валовая, 28.

Типография им. Смирнова Смоленского облуправления издательств, полиграфии и книжной торговли. г. Смоленск, пр. им. Ю. Гагарина, 2. Заказ № 3404.